МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРЕДЕЛ В НЕФОРМАЛЬНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Методические рекомендации

Барнаул

Издательство
Алтайского государственного
университета
2021

Составитель
С.В. Дронов, доцент, канд. физико – матем. наук

Рецензент
А.Н. Саженков, доцент, канд. физико – матем. наук

В методических рекомендациях изложена современная неформальная точка зрения на важнейшее в классической математике понятие предела функции одного переменного в точке. Предложен ряд приемов для вычисления таких пределов. Особенное внимание уделено интуитивной прозрачности предлагаемых способов и интерпретации получающихся результатов. Разобрано большое число примеров соответствующих вычислений. Рекомендовано в качестве дополнительного материала для практических занятий по математическому анализу студентов первых курсов естественнонаучных направлений, в частности, 01.03.02, 02.03.01, 09.03.03 и др.

Оглавление

1. Для чего все это написано

Потребность в специалистах в области компьютерного обеспечения и всевозможных IT-технологий постоянно возрастает. Как результат этого, ежегодно увеличивается набор в вузы по соответствующим специальностям. При этом считается (и это чистая правда), что такого рода специалист обязательно должен владеть основами классической математики. Идея, которая стоит за этим, такова: хотя, возможно, весь формальный объем классических математических методов ему и не понадобится, но хорошие и надежные компьютерные программы невозможно создавать без того, чтобы уметь предусмотреть если не все возможные варианты ситуаций при их практическом использовании, то, хотя бы, большинство из них. Следовательно, специалисту в области IT просто необходимо ясное, последовательное и строго логичное мышление. Оно же, без всякого сомнения, необходимо для разработки алгоритмов.

Традиционным, проверенным способом развития такого мышления является оперирование формальными математическими структурами, действие в ограниченной системе аксиом и со строго определенными способами вывода из них. Это мы (преподаватели) и пытаемся заставить делать студентов в надежде, что они приобретут навыки к такой работе и именно их, эти навыки, а не набор формальных математических определений, будут в дальнейшем использовать в своей работе уже в качестве дипломированных специалистов.

При этом современная концепция российского образования, осознаем мы это или нет, имеет в своей основе некий избыточный подход. Конкретно, российский вуз пытается дать студенту максимально широкие знания, видимо, в надежде, что из этого огромного объема он забудет не все, и кое-что все же закрепится в его голове. Этого же требуют и имеющиеся сегодня образовательные стандарты. Поэтому, следуя наработанным шаблонам, мы тренируем наших студентов на иногда неоправданно сложных математических конструкциях.

Именно с этим связаны частенько возникающие протесты студентов против, по их мнению, неоправданной сложности и заформализованности математических рассуждений. Понимание того, что все подменять рассмотрением только очевидных случаев нельзя, приходит отнюдь не сразу. Истина же, вероятнее всего, заключается в том, что именно изучение неких экзотических, маловероятных на бытовой взгляд ситуаций и есть главная сфера применения математики. Ведь если ситуация ясна и привычна, то здесь уж скорее нужен человек, который хорошо и безошибочно способен действовать по готовому алгоритму или, в крайнем случае, программист, чтобы этот алгоритм превратить в программу для компьютера. Причем особой квалификации от программиста тут не требуется. Математик же нужен лишь в случае, когда готовых рецептов нет.

Не все обучающиеся это понимают, а некоторые просто оказываются неспособны к столь высокой степени общности рассуждений, особенно те, кто пришел в вуз сразу со школьной скамьи. Поэтому преподаватель вынужден прибегать к описаниям формальных понятий с помощью неформальных аналогий, примеров из бытового опыта студентов, что, конечно же, возможно только с той или иной степенью приблизительности.

Есть и другой момент, побудивший меня написать этот текст. Классические учебники по математическому анализу, даже самые лучшие, написаны так, что все понятия вводятся как бы с нуля, не используя никакой предшествующий опыт изучения сходных вещей на практике или в рамках школьного курса. Это, безусловно, правильно, и отвечает духу классической математики. Но сегодня перед нами стоит задача дать студенту образование не только качественно, но и, по возможности, в сжатые сроки. Отрицать важность школьных знаний и опыта из других областей науки с учетом этого нерационально и неправильно. Большинство преподавателей отлично это понимают и, при неформальном общении со студентами, объясняют свой предмет с помощью именно подобных отсылок и аналогий. Частенько это несоответствие между учебником и практическими приложениями приводит к появлению у студентов убеждения, что математик думает одно, говорит другое, а в своих статьях и учебниках пишет нечто третье.

Более того, в среде профессиональных математиков имеется такое понятие, как «математический фольклор». Так называют факты и алгоритмы, нигде формально не указанные, но которыми руководствуется большинство.

Разумеется, просто эту двусмысленную ситуацию не переломить, но пытаться, конечно, стоит. Именно в попытке как-то свести вместе все перечисленные нюансы, связанные с определением и вычислением предела, и написан настоящий текст. Я попытался, формально нарушая классический стиль изложения и используя математический фольклор, ввести понятие предела функции именно так, как я это делаю для своих студентов.

2. Определение предела функции в точке

Понятие предела – одно из основных понятий классической математики. Ниже мы будем рассматривать только понятие предела функции в точке, считая, что вы уже знакомы с понятием предела числовой последовательности. По-видимому, к понятию предела математики пришли из попыток придать строгий характер высказываниям вроде «вот, примерно, какой эта величина однажды станет и далее не будет сильно меняться». Именно отсюда и происходит оборот «стремится к …», являющийся общепризнанным синонимом выражения «предел равен…». Таким образом, понятно, что основным практическим применением понятия предела служат приближенные вычисления.

Кроме общего приложения к примерным оценкам, специфически понятие предела функции связано с возможностью ее «естественного доопределения». Рассмотрим такой пример, который легко выведет нас на определение предела функции в точке и позволит увидеть некоторые нюансы, которые необходимо учесть при этом определении. Пусть

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}.$$

Попробуем построить график этой функции. Можно, конечно, прибегнуть к стандартной схеме построения графиков (подсчет производной и т.п.), но здесь мы можем сделать такое построение более простыми средствами, если заметим, что

$$f(x)=x+1 \text{ при } x\neq 1,$$

а при x=1 функция не определена. Таким образом, нужный нам график будет представлять собой прямую линию с одной выколотой точкой (1, 2).

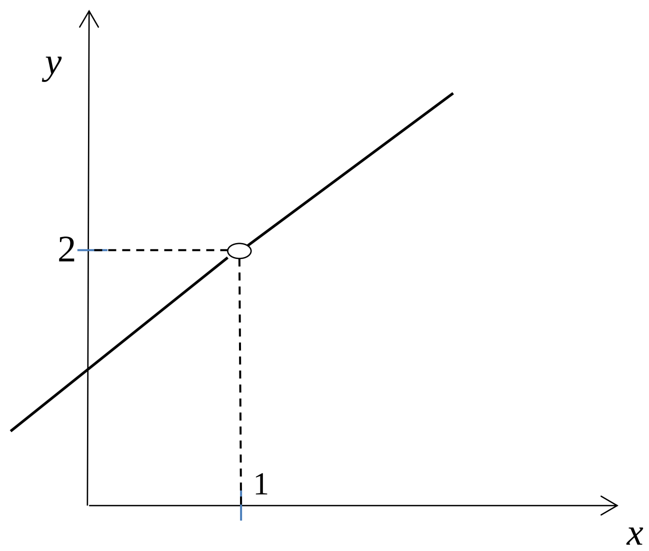

Рис. 1 Прямая y=x+1 с выколотой точкой

Понятно, что при значениях аргумента, очень близких к 1, значение этой функции окажется близко к 2. Именно это свойство и должно быть вложено в формальное определение того, что 2 есть предел данной функции. Условие близости аргумента к 1 традиционно записывается в виде

$$|x-1|<\delta, \tag{1}$$

где δ – достаточно малое положительное число. Поэтому возникает желание потребовать, чтобы при всех таких x значение $f(x)$ не слишком отличалось бы от 2. Но, каким бы малым δ не было бы выбрано, само число 1 всегда попадает в зону действия неравенства (1), и при этом значение $f(1)$ не определено! Поэтому, если мы хотим сохранить естественный характер определения предела, необходимо потребовать близость $f(x)$ к 2 для всех x, удовлетворяющих (1), кроме, возможно, самой точки 1. Более того, если бы из каких-то соображений нам было бы, к примеру, известно, что $f(1) = 5$, а во всех остальных точках функция задана той же формулой, что и раньше, то на величину предела функции в точке 1 это бы не повлияло.

Итак, изменение значения функции в одной (предельной) точке не влияет на величину предела. Что же будет, если мы изменим значения функции в произвольном конечном числе точек? Оказывается, предел при этом также не изменится, поскольку все такие точки (кроме, разумеется, предельной) могут быть отсечены за счет выбора достаточно малого δ в (1).

А если изменить значения функции в бесконечном множестве точек? Тут результат зависит от расположения этих точек относительно предельной. Если ни одна из них (как всегда, за исключением предельной) не попадает в зону действия (1) при каком-то достаточно малом δ, то предел остается на месте. Такую ситуацию принято описывать словами «точки нерегулярности лежат за пределами некоторой окрестности предельной точки». А вот если точки, в которых происходит изменения функции «сгущаются», неограниченно приближаются к точке, в которой мы хотим найти предел, то чаще всего это приводит к тому, что корректное определение предела становится просто невозможным. Например, если в точках вида $1+1/n$ при всех натуральных n принять функцию равной –1, а во всех остальных оставить без изменения, то невозможно найти ни одного δ так, чтобы $f(x)$ оказалась бы близкой по значению к 2 при всех x, удовлетворяющих (1).

Теперь настала пора привести все-таки определение предела в том виде, в котором оно фигурирует, или, точнее, должно фигурировать в классических курсах математического анализа. Пусть $F \subset R$ – область определения функции f, $\overline{F}$ – ее замыкание (т.е. к области F добавлены все ее граничные или предельные точки). Число a называется пределом функции в точке $x_0 \in \overline{F}$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ может быть указано такое $\delta > 0$, что для всех

$x \in F, x \neq x_0$ таких, что $|x - x_0| < \delta$, обязательно справедливо неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Чтобы использовать поменьше слов и придать определению лаконичную форму, то, что предел функции в данной точке равен данному числу a, часто записывают на языке кванторов:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \neq x_0)\left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\right). \quad (2)$$

Умение читать и понимать подобные формулы тоже приобрести непросто. Психологи утверждают, что, если вы смогли научиться этому, то, несомненно, обладаете математическими способностями существенно выше среднего уровня.

Запись $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ или $f(x) \to a$ при $x \to x_0$ уже подразумевает наличие предела $f(x)$ в точке x_0, равного a. Если предел равен 0, то функцию $f(x)$ называют бесконечно малой при $x \to x_0$.

Приведенное определение обычно называют определением предела по Коши. И, если именно такого определения в учебнике нет, то, видимо, автор этого учебника не хочет сразу пугать обучающихся высоким уровнем его формализма или хочет сэкономить время в надежде, что во время практических и самостоятельных занятий студенты как-то сами в этих тонкостях разберутся. А еще нужно отдельно дать определения предела функции на бесконечности и бесконечного предела в конечной точке*. И дополнительно нужно не забыть сказать, что никакого предела в данной точке у f может и не существовать!

Кроме приведенного определения есть еще и определение предела по Гейне, которое прямо показывает родство понятий пределов функции и последовательности. Итак, число a называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0 \in \overline{F}$, если для произвольной последовательности $x_n \to x_0$, такой, что $(\forall n)\, x_n \neq x_0$ оказывается, что $f(x_n) \to a$ (уже как последовательность).

Два приведенных определения предела функции в точке эквивалентны. Но определение по Гейне позволяет проще проверять факт отсутствия предела в какой-то точке, чем определение по Коши, применяя следующий факт, который напрямую вытекает из этого определения.

Следствие определения. $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *предел в том и только том случае, когда при произвольном выборе последовательностей аргументов* $u_n, v_n \to x_0$, $u_n, v_n \neq x_0$ *у последовательностей* $f(u_n), f(v_n)$ *имеются одинаковые пределы.*

Значит, для того, чтобы доказать, что предела у функции в какой-то точке x_0 не существует, достаточно найти две последовательности $u_n, v_n \to x_0$ такие, что $f(u_n)-f(v_n)$ не стремится к 0. Иногда проще проверить, что $f(u_n), f(v_n)$ имеют разные пределы при $n\to\infty$, хотя следует иметь в виду, что в утверждении наибольшей общности, вытекающем из следствия, совершенно не предполагается, что два эти предела существуют. Может быть даже так, что и $f(u_n)-f(v_n)$ не имеет предела вообще. Конечно же, обязательно $u_n, v_n \in F$.

Вот пример. Для того, чтобы доказать, что функция $f(x)=\sin\left(1/x\right)$ не имеет предела в точке 0, выберем

$$u_n=\frac{1}{\pi n}, v_n=\frac{1}{\pi/2+2\pi n} \quad (u_n, v_n\to 0, \quad n\to\infty).$$

Но, при этом

$$f(u_n)=\sin(\pi n)=0, \quad f(v_n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$$

при всех n. Таким образом, получено противоречие следствию из определения предела по Гейне.

Вообще, в произвольно малой окрестности 0 значения $\sin(1/x)$ пробегают весь интервал [–1. 1] (см. рис. 2), поэтому-то при стремлении аргумента к 0 значения функции ни к чему определенному не приближаются.

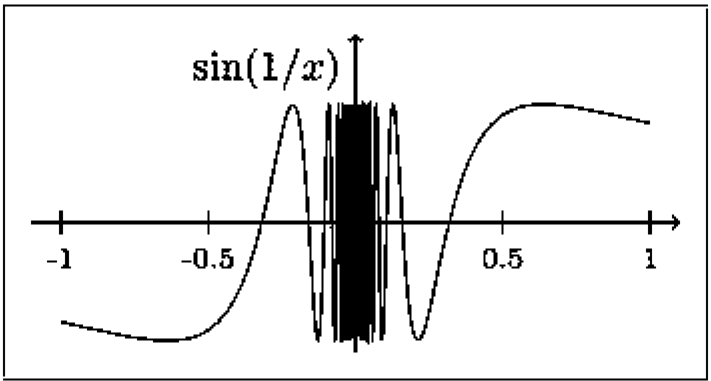

Рис. 2. График $y=\sin(1/x)$

Возможны и менее экзотичные ситуации с отсутствием предела. Пусть, например, $f(x)=|x|/x$. Тогда при выборе $u_n=1/n, \quad v_n=-1/n$ получаем

$$f(u_n)\to 1, f(v_n)\to -1, \quad n\to\infty,$$

(на самом деле в обоих случаях вместо знака $\to$ можно поставить равенство), и эта функция в нуле также не имеет предела.

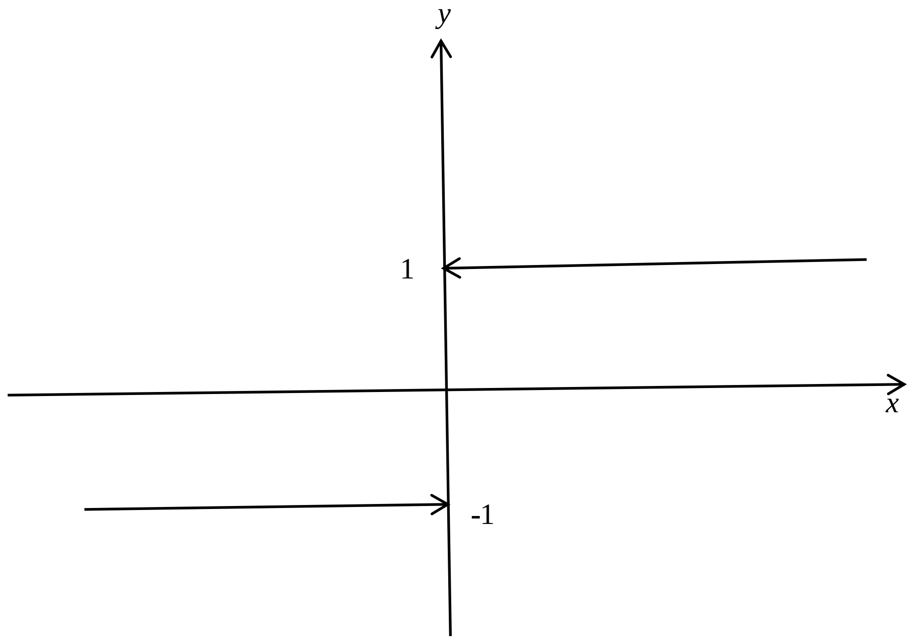

Рис. 3. График $y = |x|/x$

Причины отсутствия предела видны на рис. 3. Такую ситуацию в нуле принято характеризовать словом «скачок» или «разрыв 1-го рода». Нетрудно понять, что здесь при значениях аргумента, близких к 0 и остающихся отрицательными, например, значение -1 прекрасно справится с ролью предела этой функции в 0. То же можно сказать о числе +1 при рассмотрении лишь положительных *x*. В этой ситуации говорят о существовании односторонних пределов функции и пишут

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to 0+0} f(x) = 1.$$

Попробуйте сами дать строгие определения. Подсказка: кроме неравенства типа (1) нужно требовать, чтобы *x* был, например, левее предельной точки (вместо (1) потребовать $1 - \delta < x < 1$) или правее нее.

---

*Поговорим о бесконечных пределах и пределах на бесконечности. Стандартное определение предела функции в точке по Коши

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \neq x_0 \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon),$$

если взять из него самую суть, означает, что при достаточно близких к предельной точке значениях аргумента значение функции близко к ее пределу *a*. Главное, что мешает автоматически перенести это определение на случай определения предела в бесконечно удаленной точке или на случай $a = \infty$ – отсутствия определения близости к бесконечностям. Действительно, если бы это понятие было определено, то можно общее определение модифицировать следующим образом.

Число *a* (конечное или бесконечное) назовем пределом функции *f* в (конечной или бесконечной) точке x_0, если для любого отрезка *U*, состоящего из чисел, в достаточной степени близких к *a*, можно указать отрезок *V*, все элементы которого достаточно близки к x_0, такой, что для любого *x* из *V* число $f(x)$ обязательно попадает в первый отрезок ($x \in U \Rightarrow f(x) \in V$).

Отрезки *U*, *V*, фигурирующие в этом определении, называются окрестностями точек x_0, a соответственно. Кстати, практически так же дается определение предела в произвольных топологических пространствах, о чем вы узнаете курсе так на третьем. Осталось только понять, что числа, близкие к $+\infty$ – это большие положительные числа, а числа, близкие к $-\infty$ – большие по модулю отрицательные числа. Таким образом, учитывая то, что числа ε, δ обычно считают маленькими положительными, то близость, например, x к $+\infty$ выражают неравенством $x > 1/\delta$, а близость $f(x)$ к $-\infty$ – неравенством $f(x) < -1/\varepsilon$.

В частности, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ по определению будет записываться так

$$\forall\varepsilon > 0 \, \exists\delta > 0 \, \forall x \quad \left(x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Остальные варианты подобных определений потренируйтесь давать самостоятельно.

Если предел функции в x_0 бесконечен, то о ней в этой точке принято говорить, как о бесконечно большой. У таких функций график при приближении аргумента к x_0 «уходит» неограниченно вверх или вниз в зависимости от знака бесконечности, являющейся пределом.

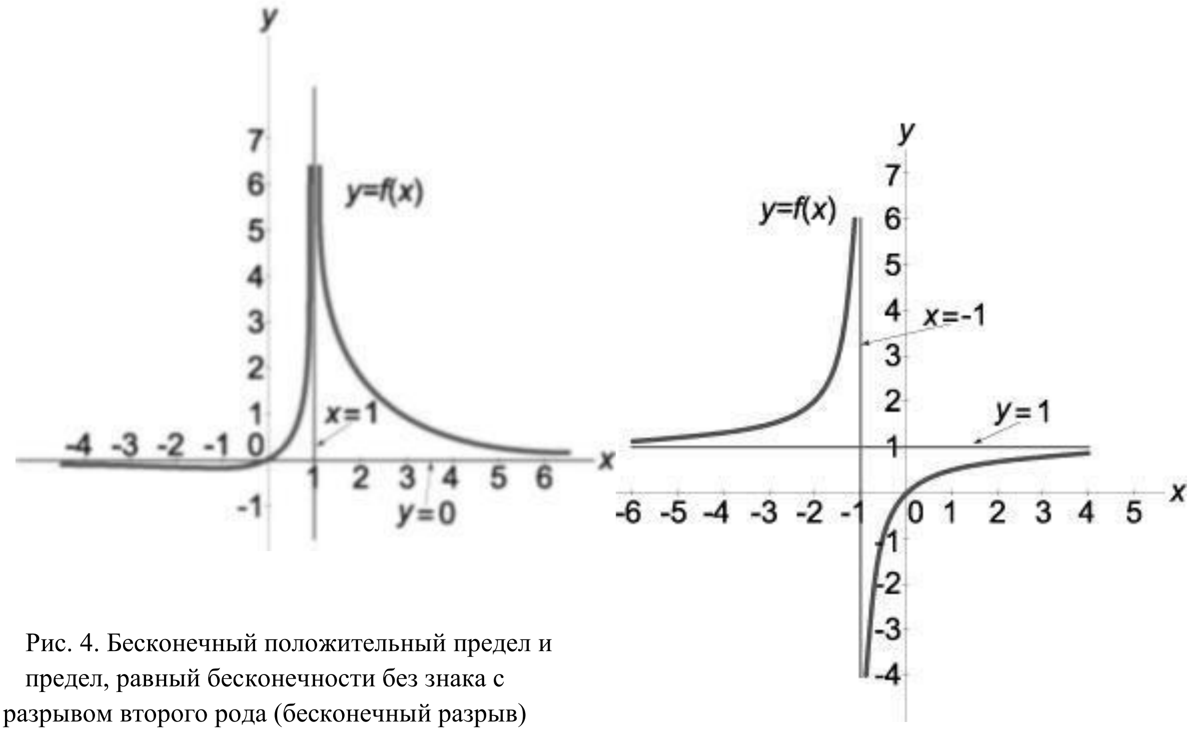

Рис. 4. Бесконечный положительный предел и предел, равный бесконечности без знака с разрывом второго рода (бесконечный разрыв)

И еще пара замечаний – немного в сторону. Проанализировав данные только что определения, мы видим, что при определения предела на бесконечности мы фактически имеем дело с односторонним пределом. Точнее, это левый предел на $-\infty$ и правый на $+\infty$. Об этом же говорят и неравенства в определениях, в который, в отличие от (2) отсутствует модуль.

Естественно поставить вопрос – а что будет, если в посылке определения поставить, например,

$$|x| > \frac{1}{\delta}? \tag{3}$$

Понятно, что решения неравенства (3) заполняют объединение двух отрезков $(-\infty, -1/\delta) \cup (1/\delta, +\infty)$. В этом случае принято говорить, что x попал в окрестность бесконечно удаленной точки (без знака), а в случае, когда

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x) \quad |x| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon,$$

например, говорят о числе а как о пределе $f(x)$ на бесконечности (без знака). Запись в виде формулы имеет вид

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a.$$

Неформальное понимание такого определения приходит, если принять точку зрения на действительную прямую как на окружность бесконечно большого радиуса, концы прямой при этом соединяются в бесконечно удаленной точке. Преобразование окрестности этой точки в объединение двух отрезков при возвращении от окружности к действительной прямой показано на рис 5.

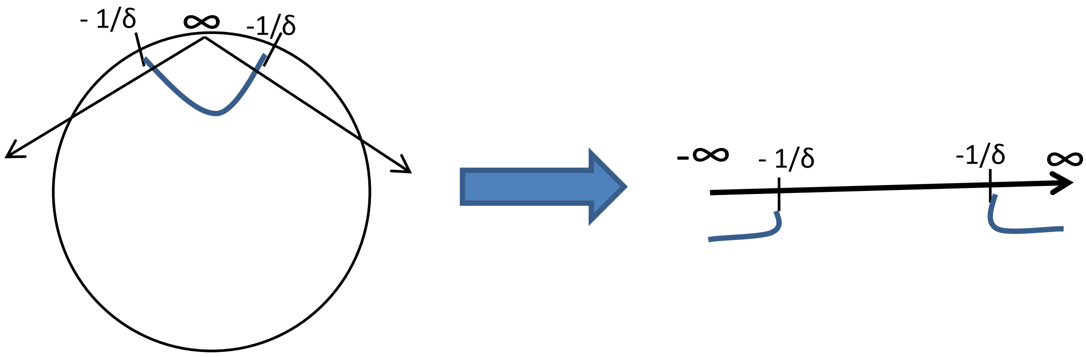

Рис. 5. Преобразование окрестности бесконечно удаленной точки

3. О вычислении предела

Как известно, если f – непрерывная функция, то

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)).$$

Это, собственно, если не определение, то прямое следствие определения непрерывности. Для успешного применения этого факта положено знать, что все элементарные функции** на своих областях определения непрерывны.

Таким образом, если f, g обе могут быть записаны конечными формулами без непривычных вам обозначений (типа si, erf, [.] и т.п.) и значение x_0 может быть просто подставлено в выражение $f(g(x))$, то, сделав это, вы и получите искомый предел.

Что касается обычных арифметических действий, – так они тоже являются непрерывными в некотором смысле. Поэтому, если можно отдельно вычислить пределы f, g и выполнить требуемое арифметическое действие над ними, то, сделав это, мы найдем предел их суммы, разности, произведения или частного. Это утверждение принято называть арифметическими свойствами предела.

Значит, некоторые затруднения для сумм, частных и т.п. могут возникнуть лишь в ситуациях, когда

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0} g(x) \in \{0, \pm\infty\},$$

да и то не всегда. Некоторые случаи даже в таких «крайних» ситуациях могут быть обоснованы однозначно (см. таблицы ниже).

Строки таблиц соответствуют значениям предела g, столбцы – пределам функции f. Знаки C, c с индексами означают положительные конечные ненулевые константы, – именно поэтому перед ними проставлен знак + или -. Символом «?» в таблицах обозначена так называемая неопределенность, т.е. случай, требующий отдельного исследования, в результате которого может, вообще говоря, получиться что угодно. При этом исследование знака этой неопределенности чаще всего затруднений не вызывает, поэтому, если возможно, этот знак указан.

Мне кажется, что весьма полезным будет самостоятельно разобраться, почему в каждой из клеток соответствующих таблиц стоит именно этот результат – ведь запоминать таблицы сложно, да и не нужно, если вы поймете механизм их заполнения.

Таблица 1 (сложение) Значения пределов $f+g$

$g \backslash f$	$-\infty$	$-c_f$	-0	+0	$+C_f$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$-c_g$	$-\infty$	$-c_f-c_g$	$-c_g$	$-c_g$	$+C_f-c_g$	$+\infty$
-0	$-\infty$	$-c_f$	-0	0	$+C_f$	$+\infty$
+0	$-\infty$	$-c_f$	0	+0	$+C_f$	$+\infty$
$+C_g$	$-\infty$	$-c_f+C_g$	$+C_g$	$+C_g$	$+C_f+C_g$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Таблица 2 (умножение) Значения пределов $f \cdot g$

$g \backslash f$	$-\infty$	$-c_f$	-0	+0	$+C_f$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	+? или 0	-? или 0	$-\infty$	$-\infty$
$-c_g$	$+\infty$	$+c_f \cdot c_g$	+0	-0	$-C_f \cdot c_g$	$-\infty$
-0	+? или 0	+0	+0	-0	-0	-? или 0
+0	-? или 0	-0	-0	+0	+0	+? или 0
$+C_g$	$-\infty$	$-c_f \cdot C_g$	-0	+0	$+C_f \cdot C_g$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	-? или 0	+? или 0	$+\infty$	$+\infty$

Таблица 3 (деление) Значения пределов $f\ /\ g$

g \ f	$-\infty$	$-c_f$	-0	+0	$+C_f$	$+\infty$
$-\infty$	+? или 0	+0	+0	-0	-0	-? или 0
$-c_g$	$+\infty$	$+c_f\ /\ c_g$	+0	-0	$-C_f\ /\ c_g$	$-\infty$
-0	$+\infty$	$+\infty$	+? или 0	-? или 0	$-\infty$	$-\infty$
+0	$-\infty$	$-\infty$	-? или 0	+? или 0	$+\infty$	$+\infty$
$+C_g$	$-\infty$	$-c_f\ /\ C_g$	-0	+0	$+C_f\ /\ C_g$	$+\infty$
$+\infty$	-? или 0	+0	-0	+0	+0	+? или 0

** Строгое определение элементарной функции: прежде всего, к ним относят четыре функции, которые называют основными элементарными, это

$$f_1(x)=1,\quad f_2(x)=x,\quad f_3(x)=\sin x,\quad f_4(x)=e^x.$$

Кроме этого, допустимо применение к элементарным функциям четырех арифметических действий, а также умножения на произвольные действительные константы, взятие суперпозиций и обратных функций. Функция называется элементарной, если она может быть получена из четырех основных элементарных функций путем совершения произвольного конечного числа допустимых операций семи описанных типов.

Напомню, что для f_1 обратная функция не существует, для второй основной элементарной функции обратная совпадает с ней самой, а (при очевидных ограничениях на области определения)

$$f_3^{-1}(x)=\arcsin x,\quad f_4^{-1}(x)=\ln x,$$

так что последние две функции тоже являются элементарными.

4. О неопределенностях. Понятие раскрытия неопределенности

Выше уже было введено понятие неопределенности. Строгого определения для этого понятия давать не будем, для вычислений оно нам не понадобится. Но еще раз скажем, что неопределенностью называется результат некоего действия над двумя функциями, у каждой из которых мы знаем значения пределов в исследуемой точке, а о пределе результата нашего действия можно только догадываться. Тогда процесс вычисления предела принято называть раскрытием неопределенности. Условимся далее говорить, что, если исследуемое действие производилось над функциями $f(x), g(x)$, то эти функции участвуют в формировании неопределенности.

Чаще всего пределы функций, участвующих в формировании неопределенностей, бывают либо бесконечностями, либо нулевыми. Конечно же, возможна и ситуация, когда один или оба предела в исследуемой точке не существуют, но традиционно такую ситуацию не принято называть неопределенностью, и вычисление подобных пределов изучают отдельно (если когда-либо систематически изучают вообще). Пока ограничимся ситуацией, когда и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ оба определены. Анализ приведенных выше таблиц 1 – 3 показывает, что неопределенности возникают чаще всего при выполнении деления. В зависимости от значений двух участвующих в формировании неопределенности пределов, это неопределенности типа $0/0$ (когда оба предела равны 0) или типа ∞/∞ (когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \in \{\pm\infty\}$). Есть, конечно, еще случаи сложения бесконечностей разных знаков, которые называют неопределенностями типа $\infty-\infty$, а также попытки умножения 0 на какую-либо бесконечность $(0\cdot\infty)$, но именно неопределенности первых двух типов $-$ $0/0$ и ∞/∞, принято считать основными.

Дело в том, что остальные неопределенности могут быть сведены к этим двум. Например, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, то, совершая несложное преобразование

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\left(1/g(x)\right)}, \quad \text{при этом } \frac{1}{g(x)}\to 0,$$

получим неопределенность типа 0/0.

Если же, например у нас известно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, то

$$f(x)-g(x)=f(x)\cdot\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right),$$

и, в результате раскрытия неопределенности типа ∞/∞, образовавшейся во внутренних скобках, мы либо вообще уйдем от неопределенности, либо сведем все к только что рассмотренной неопределенности $0\cdot\infty$ (если внутренняя неопределенность после раскрытия окажется приведенной к 1).

Итак, имеет смысл сосредоточиться на изучении приемов раскрытия двух основных типов неопределенностей. Перед этим приведем несколько примеров, поясняющих понятие неопределенности еще раз.

Пример 1. (0/0). $\lim\limits_{x\to 0} x=\lim\limits_{x\to 0} Cx=0$, но $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Cx}{x}=C$, что показывает, что в результате раскрытия такой неопределенности может получиться любая действительная константа C.

Пример 2. (0/0) $\lim\limits_{x\to 0} x=\lim\limits_{x\to 0} x^3=0$. При этом

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}=+\infty,$$

откуда видно, что эта неопределенность может также приводить и к 0, и к ∞.

Пример 3. (∞/∞) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{3(x-2)^2}=+\infty,$ но

$$\lim_{x\to 2}\frac{2/(x-2)^2}{1/(3(x-2)^2)}=6.$$

Я думаю, что после этих примеров построение любого количества подобных им не будет для вас проблемой. Рекомендую самостоятельно придумать примеры неопределенности типа ∞/∞, которая раскрывается как 0 или как бесконечности разных знаков.

По меньшей мере упоминания здесь заслуживает метод раскрытия неопределенностей, который некоторые склонны рассматривать, как универсальный. Этот метод называют правила Лопиталя – во множественном числе, поскольку для неопределенностей двух основных типов эти правила доказываются по-разному, хотя и имеют одинаковую формулировку.

Две теоремы в одной (правила Лопиталя). *Пусть отношение* $f(x)/g(x)$ *при* $x\to x_0$ *образует либо неопределенность типа 0/0, либо типа* ∞/∞. *Пусть также обе функции f,g имеют производные в точке* x_0. *Тогда*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если только предел в правой части этого равенства существует.

Как и всегда в подобных формулировках, это означает, что существование предела отношения производных обязательно приводит к существованию предела отношения исходных функций.

Забавным и малоизвестным фактом относительно этих правил является то, что первооткрывателем их был вовсе не Гийом Лопиталь, а, по-видимому, Иоганн Бернулли, написавший об этом способе раскрытия неопределенностей Лопиталю в письме в 1696 году.

Условия наличия неопределенности одного из двух типов в точке x_0 является обязательным, и его необходимо проверять всегда перед применением правил. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+3}\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1)'}{(x+3)'}=0,$$

тогда как на самом деле ответ здесь 1/3. Ошибка, естественно, состоит в том, что в первоначальном примере никакой неопределенности не было, а значит, применение правила Лопиталя незаконно.

Отметим, наконец, что, если предел отношения производных невозможно вычислить (неопределенность сохраняется), что формально также запрещает использование правила, то можно попытаться взять производные числителя и знаменателя повторно, затем еще раз и т.д. до тех пор, пока ответ не получится. Строгое обоснование правильности результата при этом производится «с конца», обратным ходом: раз удалось вычислить последний предел, то, по теореме, существует и равен ему предпоследний, значит, третий с конца и так до тех пор, пока мы не вернемся к исходному примеру. Бесконечные пределы – не исключение.

Несмотря на кажущуюся универсальность правил Лопиталя, безусловно, стоит владеть и другими приемами раскрытия неопределенностей, они иногда быстрее приводят к результату. Да и классическое математическое образование обязательно включает в себя эти приемы, – оказывается, они могут потребоваться в самых неожиданных задачах.

5. Простейший случай раскрытия неопределенности 0/0. Два замечательных предела. Неопределенности в степенях

Видимо, самый простой случай неопределенности типа 0/0 это случай, когда ищется предел отношения двух многочленов в точке x_0, в которой оба они обращаются в 0. Эта неопределенность проще всего раскрывается с помощью выделения и сокращения общего множителя $(x-x_0)^k$, где k – наименьшая из кратностей корня x_0 в числителе и знаменателе. Такой множитель заведомо может быть выделен в обоих многочленах, что обеспечивается известной из школьного курса математики теоремой Безу. Само выделение множителя требуемого вида осуществляется, например, делением каждого из многочленов на $x-x_0$ «уголком» или применением схемы Горнера до тех пор, пока результат деления хотя бы одного из многочленов не перестанет иметь x_0 своим корнем. После сокращения мы получим возможность раскрыть неопределенность с помощью таблицы 3.

Рассмотрим простой пример:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-4x^2+5x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-2)(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2.$$

Следующей ступенью сложности неопределенности этого же типа является отношение тригонометрической функции к многочлену. Здесь выделить общий множитель заведомо не получится, но на помощь приходит следующее соотношение, которое принято называть *первым замечательным пределом*.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Для уверенного применения этого и некоторых последующих соотношений полезно владеть следующим приемом, который можно назвать заменой переменной в пределе.

Теорема (очевидная, о замене переменных). *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} t(x)=a$. *Тогда*

$$\lim_{x\to x_0} f(t(x)) \quad = \quad \lim_{t\to a} f(t).$$

Здесь мы вместо прежней переменной *x* как бы вводим новую величину *t*, соответственно заменяя предельное значение, к которому она стремится.

Рассмотрим пару примеров, иллюстрирующих этот прием.

Пример 1. Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$. Для этого возьмем $t=2x$. Заметив, что тогда $x=t/2$ и, при $x\to 0$, выполнено $t\to 0$, получаем законность следующей цепочки преобразований

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t/2}=2\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=2.$$

Пример 2. Пусть требуется найти $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x-\pi}{\operatorname{tg}(\pi-x)}$. Сделаем здесь замену $t=\pi-x$ и заметим, что $t\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to \pi}\frac{x-\pi}{\operatorname{tg}(\pi-x)}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{\operatorname{tg} t}=-\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t\right)=-\lim_{t\to 0}\frac{1}{(\sin t/t)}\cdot\lim_{t\to 0}\cos t=-1.$$

Еще одно соотношение в теории пределов, содержащее в названии замечательное прилагательное «замечательный», связано с вычислением пределов степеней, в которых переменная величина одновременно содержится и в основании, и в степени. Приведем здесь это соотношение именно в том виде, в котором его удобнее всего использовать.

Второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}=e, \text{ если } \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

Разберем далее ситуацию, возникающую при вычислении $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$.

Строго говоря, возведение в степень прямо не относится к числу операций, допустимых в классе элементарных функций, но нас спасает тот факт, что натуральный логарифм и экспонента – непрерывные функции, поэтому, с учетом соотношения

$$z(x)=\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\ln f(x)\Rightarrow f(x)^{g(x)}=e^{z(x)}$$

мы получаем возможность записать

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{z(x)}=\exp\{\lim_{x\to x_0} z(x)\}=\exp\{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\ln f(x)\}=$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\right\}=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},$$

если только оба $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)$ таковы, что можно выполнить их умножение без возникновения неопределенности в смысле таблицы 2 выше.

Если совсем просто, то $G=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ не должен быть равен какой-либо из бесконечностей или 0, если при этом $F=\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)=0,$ а также G запрещено равняться 0, когда, соответственно, F равен любой из бесконечностей. Как вы видите, все устроено довольно тонко и требует хорошего понимания, поэтому при оформлении таких примеров принято отдельно вычислять пределы основания степени и показателя степени, преобразуя их, если надо, чтобы не возникла одна из описанных здесь ситуаций неопределенности, а потом уже пользоваться соотношением

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \qquad (4)$$

если препятствий к этому нет.

Если здесь основание степени оказывается стремящимся к 1, используем на полную катушку второй замечательный предел. Для строгих обоснований ответа в тех случаях, когда основание степени к единице не стремится, обычно используют оценку этого основания некоторой константой. Далее применяют так называемую теорему о двух милиционерах:

Теорема. *Если при всех x, достаточно близких к* x_0, *выполнено неравенство* $f(x)\le h(x)\le g(x)$, *и* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A,$ *то обязательно и функция h имеет предел в этой точке, причем* $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A.$

Окончательно, условия для возможности применения (4) выглядят так

$$\boxed{F=\lim_{x\to x_0}\ln f(x)\notin\{0,\pm\infty\};\quad G=\lim_{x\to x_0} g(x)\notin\{0,\pm\infty\}.} \qquad (5)$$

Перейдем к примерам.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{1/x}$. Использование формулы (4) приводит к неверному ответу $1^{\infty}=1$. Ошибка возникла потому, что здесь F=0, $G=\infty$. Таким образом, на пути правильного решения встает неопределенность типа

$0\cdot\infty$ из таблицы 2. Правильное решение использует второй замечательный предел:

$$(1-x)^{1/x} = (1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{x}}, \quad \alpha(x) = -x \to 0. \tag{6}$$

Выберем здесь $f(x) = (1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}$, $g(x) = \dfrac{\alpha(x)}{x}$. Тогда $g(x) \to -1$ (вообще-то, просто равно -1 при каждом x), а, согласно второму замечательному пределу, $f(x) \to e$. Таким образом, (5) выполнено, и мы имеем возможность применить (4):

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/x} = e^{-1} = \frac{1}{e}. \tag{7}$$

Оформляют в сокращенном виде это примерно так. Сначала получают (6), затем с упоминанием второго замечательного предела пишут:

$$(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \to e, \quad \frac{\alpha(x)}{x} = -1 \to -1$$

и, наконец, записывают ответ в виде (7).

Дальше приведен подобный пример в кратком оформлении.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2x}{1-x}\right)^{(3+x)/\sin x}$. Заметим, что

$$\frac{1+2x}{1-x} = 1 + \frac{3x}{1-x} = 1+\alpha, \quad \alpha \to 0.$$

Поэтому

$$\left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^{(3+x)/\sin x} = \left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha(3+x)}{\sin x}},$$

причем основание степени (большая скобка) стремится к e в силу второго замечательного предела. Рассмотрим степень

$$\frac{\alpha(3+x)}{\sin x} = \frac{3x}{\sin x}\cdot\frac{3+x}{1-x} \to 3\cdot 3 = 9 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Здесь был использован первый замечательный предел. Теперь можно записать ответ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2x}{1-x}\right)^{(3+x)/\sin x} = e^9$.

Именно такого оформления и ожидают большинство преподавателей от своих лучших студентов.

Заметим, что без преобразования типа (6) мы бы вновь получили в качестве ответа неверное значение 1.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 2+0}\left(\dfrac{1+2x}{1+x}\right)^{1/(x-2)}$. Ясно, что, хотя здесь вновь $G=+\infty$, но основание не стремится к 1, поэтому второй замечательный предел не работает. Конечно, имея в виду проведенное выше исследование примеров такого типа и отметив, что

$$F=\lim_{x\to 2}\ln\frac{1+2x}{1+x}=\ln\frac{5}{3},$$

можно увидеть возможность использовать (4), и получить верный ответ

$$\lim_{x\to 2+0}\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^{1/(x-2)}=\left(\frac{5}{3}\right)^{+\infty}=+\infty,$$

но средняя часть этой формулы математически не вполне корректна, да и условия (5) чисто формально здесь выполнены не полностью, поэтому лучше использовать другой путь – теорему о двух милиционерах.

Имея в виду угаданный ответ, оценим основание снизу

$$\frac{1+2x}{1+x}=2-\frac{1}{1+x}\geq\frac{3}{2}\quad \text{при}\quad x\geq 1, \tag{8}$$

и этим неравенством мы можем пользоваться, поскольку $x\to 2$. Тогда

$$\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^{1/(x-2)}\geq\left(\frac{3}{2}\right)^{1/(x-2)}\to+\infty\quad \text{при } x\to 2.$$

Привлекая теорему о двух милиционерах, записываем ответ:

$$\lim_{x\to 2+0}\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^{1/(x-2)}=+\infty.$$

Отметим, что вместо использования строго доказанной оценки (8) можно было просто сослаться на то, что, согласно определению предела, при *x*, достаточно близком к 2, значение основания окажется достаточно близко к 5/3, т.е., например,

$$\frac{1+2x}{1+x}\geq\frac{4}{3},$$

что позволяет произвести те же самые рассуждения, которые были произведены с привлечением (8).

6. Эквивалентные функции. Использование эквивалентностей в вычислении пределов

Пока мы подробно исследовали лишь два типа неопределенностей – 0/0 и ∞/∞. Настала пора сказать о том, что вторую из них можно всегда свести к первой. Действительно, пусть при $x \to x_0$ и $f(x)$, и $g(x)$ имеют бесконечные пределы. Тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(1/g(x))}{(1/f(x))}, \quad \text{причем} \quad \frac{1}{g(x)}, \frac{1}{f(x)} \to 0.$$

Это позволяет рассматривать только неопределенность 0/0, поскольку все остальные оказались сведенными к ней. Отметим, что неопределенности со степенями, рассмотренные в предыдущем разделе, могут быть сведены сюда же логарифмированием. Для развития соответствующей техники нам понадобится одно содержательное понятие.

Две функции $f(x), g(x)$ мы будем называть эквивалентными при $x \to x_0$, если имеет место предельное соотношение

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Записывать этот факт условимся так: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$. Если $x_0 = 0$, что в дальнейшем тексте у нас почти всегда будет справедливо, будем просто говорить об эквивалентных функциях (без упоминания предельной точки).

Оказывается, при вычислении пределов частных, а именно они у нас и дают неопределенности чаще всего, эквивалентные функции в определенном смысле взаимозаменяемы.

Теорема. *Пусть* $f(x) \sim u(x), g(x) \sim v(x)$ *при* $x \to x_0$. *Тогда*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Докажем это утверждение.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)/u(x)}{g(x)/v(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)/u(x))}{\lim\limits_{x \to x_0} (g(x)/v(x))} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Теорема доказана, поскольку оба предела (в числителе и знаменателе) равны по 1.

Соотношение $f(x) \sim f(x)$ является тривиальным, поэтому при рассмотрении частных можно заменять на эквивалентную функцию лишь один числитель или лишь один знаменатель. Но – и это крайне важно, – такие замены можно осуществлять ТОЛЬКО в дробях. Ни в разностях, ни в степенях, ни в произведениях этого делать нельзя. Примеры далее будут приведены.

7. Две цепочки основных эквивалентностей

Для уверенного овладения приемами вычисления пределов полезными являются две следующие цепочки эквивалентностей, которые полезно запомнить. Пусть $\alpha \to 0$ (бесконечно малая величина).

Первая цепочка (тригонометрия)

$$\alpha \sim \sin\alpha \sim \operatorname{tg}\alpha \sim \arcsin\alpha \sim \operatorname{arctg}\alpha.$$

Вторая цепочка (смесь)

$$\alpha \sim \ln(1+\alpha) \sim \left(e^{\alpha}-1\right) \sim \frac{(1+\alpha)^p-1}{p}\ (p>0).$$

Нумерация цепочек связана с названиями замечательных пределов, из которых они выводятся. Последняя эквивалентность во второй цепочке имеет более сложный вид, поэтому имеет смысл упомянуть, что на практике ее обычно употребляют в следующей форме

$$(1+\alpha)^p - 1 \sim p\alpha.$$

Докажем эти соотношения – иногда бывает удобнее при вычислении пределов не использовать сами эквивалентности, а следовать процессу их доказательства.

Первая эквивалентность первой цепочки – это, собственно и есть первый замечательный предел. Далее,

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\right)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha}=1,$$

чем завершается обоснование второй эквивалентности. Теперь обозначим $\beta=\arcsin\alpha$. Тогда $\beta\to 0, \alpha=\sin\beta.$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\sin\beta}=\frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\sin\beta/\beta\right)}=1.$$

Конечно же, первый замечательный предел снова сработал. Для получения последней эквивалентности сделаем замену $\beta=\operatorname{arctg}\alpha \Rightarrow \alpha=\operatorname{tg}\alpha$. При этом, очевидно, $\beta\to 0$. Используя уже доказанную вторую эквивалентность,

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\operatorname{tg}\beta/\beta\right)}=1.$$

Перейдем ко второй цепочке. Согласно второму замечательному пределу

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha)\right)=\lim_{\alpha\to 0}\ln(1+\alpha)^{1/\alpha}=\ln e=1.$$

Введем новую бесконечно малую $\beta=e^{\alpha}-1\Rightarrow\alpha=\ln(1+\beta)$. Тогда

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}=\frac{1}{\lim\limits_{\beta\to 0}\left(\ln(1+\beta)/\beta\right)}=1,$$

и осталось обосновать только последнюю (самую сложную) эквивалентность второй цепочки. Займемся этим.

Введем β так, что $1+\alpha=e^{\beta}$. Поскольку $\alpha\to 0$, то и $\beta\to 0$. Ясно, что $\beta=\ln(1+\alpha)$ Тогда

$$\frac{(1+\alpha)^{p}-1}{p\alpha}=\frac{e^{p\beta}-1}{p\ln(1+\beta)}=\frac{e^{p\beta}-1}{p\beta}\cdot\frac{\beta}{\left(\ln(1+\beta)/\beta\right)}\to 1,$$

что и завершает доказательство последней оставшейся эквивалентности. Здесь были использованы уже доказанные первая и вторая эквивалентности из второй цепочки, а также тот очевидный факт, что при любом p величина $p\beta$ является бесконечно малой вместе с β.

8. Примеры применения основных эквивалентностей

Несколько примеров – совсем простых и не очень, а также примеры, связанные с неверным применением основных эквивалентностей собраны в последнем разделе данного пособия.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sqrt{1+\sin x}-1}$. Для решения этого несложного примера отметим, что $\sin x$ при рассматриваемых x является бесконечно малой, поэтому, используя последнюю эквивалентность второй цепочки при $p=1/2$ и первую эквивалентность первой, имеем

$$\sqrt{1+\sin x}-1\sim\frac{1}{2}\sin x\sim x/2.$$

При помощи первой эквивалентности второй цепочки заключаем

$$\ln(1+3x)\quad\sim\quad 3x,$$

откуда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{1+\sin x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x/2}=6.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^{2}}{\sin\pi x}$. Как видим, здесь x не стремится к 0, а для пользования любыми из рассмотренных выше эквивалентностей нужно, чтобы это было выполнено. Предпримем шаги к исправлению ситуации, положив $t=1-x$. Тогда $x=1-t$, и

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}=\lim_{t\to0}\frac{1-(1-t)^2}{\sin(\pi-\pi t)}=\lim_{t\to0}\frac{2t-t^2}{\sin\pi t}=\lim_{t\to0}\frac{2t-t^2}{\pi t}=\lim_{t\to0}\frac{2-t}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

Здесь мы, конечно же, использовали формулу приведения и первую основную эквивалентность.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x-\ \sin x^3}$. Здесь придется немного преобразовать исходный пример прежде, чем мы сможем воспользоваться основными эквивалентностями. Прежде всего, необходимо понимать, что любая показательная функция для математического анализа – не более, чем вариант экспоненты, а именно экспонента и используется в наших основных цепочках. Преобразуем с этой точки зрения составные части числителя.

$$5^{2x}=e^{\ln(5^{2x})}=e^{2x\ln5};\quad 2^{3x}=e^{3x\ln2}.$$

Тогда получим выражение для числителя примера

$$5^{2x}-2^{3x}=\quad e^{3x\ln2}\left(e^{2x\ln5-3x\ln2}-1\right). \tag{9}$$

Мы прибегли к такой процедуре исключительно для того, чтобы заменить затем получившуюся длинную скобку на показатель экспоненты там, ведь этот показатель является бесконечно малой величиной, а следовательно, возможно использовать вторую эквивалентность во второй основной цепочке. Заметим также, что экспонента, стоящая перед скобкой «безобидна», более того, ее предел в нашей точке равен 1. На эту единицу мы ее дальше и заменим.

Хочется подчеркнуть, что в последнем случае речь не идет о какой-либо эквивалентности, а просто используется такой факт: если $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=1,$ то для произвольной функции *f*, имеющей предел в соответствующей точке, $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x).$ Хотя и кажется, что просто *g* заменяется на 1, но, как вы видите, за этим стоит нечто совсем иное.

Обычной ошибкой при преобразовании знаменателя примера 3 является реализованное жгучее желание заменить синусы на их аргументы порознь (ориентируясь при этом на первую основную эквивалентность) и получить $x-x^3$. К сожалению, такое действие является ошибочным, эквивалентностями можно пользоваться только в дробях, но отнюдь не в разностях. И, хотя, как вы увидите, сделав это неверное действие в нашем случае мы все же получим верный ответ, но все равно, это ошибка! А мы пытаемся научиться ошибок избегать.

Правильным является, например, такое преобразование примера:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x-\ \sin x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\ln 5-3x\ln 2}{\sin x-\ \sin x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln 5-3\ln 2}{\sin x/x-\ \sin x^3/x}=$$

$$=\frac{2\ln 5-3\ln 2}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x/x\right)-\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x^3/x\right)}=\frac{\ln 5^2-\ln 2^3}{\lim\limits_{x\to 0}\left(x/x\right)-\ \lim\limits_{x\to 0}\left(x^3/x\right)}\ =\ \ln\frac{25}{8}.$$

Здесь, разумеется, использовано (9), арифметические свойства предела, а также дважды (в знаменателе) первая основная эквивалентность.

Есть и альтернативный способ преобразования знаменателя – использование формулы разности синусов:

$$\sin x-\sin x^3=2\sin\frac{x-x^3}{2}\cos\frac{x+x^3}{2}\sim(x-x^3)\cdot\cos\frac{x+x^3}{2}.$$

При этом последний косинус «безобиден», стремится к 1.

Этот способ поясняет, почему, если бы мы совершили ошибку, заменив каждый из синусом своим аргументом, мы все равно получили бы верный ответ.

Еще раз хочу подчеркнуть, что, приведя пример с верным результатом в результате ошибочных рассуждений, я не хотел дать повода такие ошибочные рассуждения применять и дальше. Целью моей была демонстрация того, как иногда глубоко может быть закопана ошибка.

Наконец, настала пора привести простой пример, еще раз демонстрирующий невозможность использования эквивалентностей в разностях, суммах и т.п.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-e^x+1}{\arcsin^2 x}$. Отметим, что обратная тригонометрическая функция в знаменателе пугать вас теперь совершенно не должна. Она присутствует в первой цепочке эквивалентностей, и мы знаем, что в нашем случае это просто замаскированная форма записи x^2.

Ловушка, в которую здесь не стоит попадаться, состоит в якобы правильной возможности использовать эквивалентности

$$\ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x.$$

Если попасться в нее, то мы получим в числителе дроби 0, а значит, и ответ должен вроде бы равняться 0.

Чтобы получить правильный ответ, здесь придется прибегнуть к более точным инструментам, чем наши эквивалентности. Без того, чтобы подробно такие методы описывать, можно обойтись правилом Лопиталя. Действительно, здесь явно есть неопределенность типа 0/0, а значит, примемся дифференцировать.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{\arcsin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)-e^x}{2x}.$$

Неопределенность сохранилась. Продолжим дифференцирование.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)-e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1/(1+x)^2-e^x}{2}=-1.$$

Это и есть правильный ответ***.

***Для знатоков: упомянутым выше более точным, чем цепочки основных эквивалентностей, являются так называемые формулы Маклорена, по которым можно приблизить функцию, дифференцируемую достаточно большое число раз, многочленом с достаточно большой степенью точности. Для нашей задачи нужны следующие широко известные формулы

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...;\quad e^x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...,$$

справедливые при x, достаточно близком к 0. Применяя их, преобразуем числитель примера

$$\ln(1+x)-e^x+1=\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=-x^2+o(x^2),$$

где через $o(x^2)$ обозначены функции (вообще говоря, разные), которые стремятся к 0 быстрее, чем x^2. Точнее, для каждой такой функции $o(x^2)/x^2\to 0,$ когда $x\to 0$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=-1.$$

На этом я отпускаю своих читателей в дальнейшее самостоятельное плавание. Успехов вам в изучении, а главное, в применении математического анализа!

Издательская лицензия ЛР 020261 от 14.01.1997.
Подписано в печать 22.08.2021.
Формат 60х84 1 / 16. Бумага офсетная.
Усл.-печ. л. 1,62 Тираж 100. Заказ 188.
Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66