Топологии невырожденных локально минимальных деревьев

В.В. Шевелев
БГПУ, г. Барнаул

При проектировании дорог, линий электропередач, трубопроводных систем, микросхем и т.д. возникает проблема построения сети минимальной длины натянутой на n данных точек (проблема Штейнера). В 1970 году было доказано что задача поиска минимальной сети является NP-полной задачей (М. Гэри, Д. Джонсон), поэтому изучение данной проблемы в современной науке разделилось на два направления: 1) поиск эффективного алгоритма построения дерева близкого (не сильно отличающееся по длине) к дереву Штейнера (ДШ); 2) описание всех локально минимальных деревьев с данной границей (обобщенная проблема Штейнера), этой задачей и занимается автор.

Приведем полученные результаты:

- Деревом с границей будем называть граф, равный объединения дерева и многоугольника натянутого на граничные вершины дерева. Очевидно, что соответствие «дерево» – «дерево с границей», является взаимно однозначным соответствием.
- Кодом дерева $\boldsymbol{G}$ назовем упорядоченную последовательность чисел $(\boldsymbol{g_1 g_2 .. g_n})$, каждое $\boldsymbol{g_i}$ из которых, равно количеству углов в $\boldsymbol{i}$-грани, дерева с границей соответствующего дереву $\boldsymbol{G}$.
- Длина кода дерева очевидно равна мощности граничного множества дерева.
- Если перестановка цифр p – код дерева, то на нем выполняется условие теоремы Эйлера о соотношение количеств ребер, граней, вершин.
- Дерево с границей, очевидно, является двумерным клеточным комплексом (по определению).
- Будем говорить, что два дерева имеют одну топологию, если соответствующие им двумерные клеточные комплексы – эквивалентны.
- Коды деревьев с одинаковой топологией отличаются друг от друга циклическими перестановками. Иначе множество топологий границы есть фактор-множество кодов деревьев по отношению «являться циклической перестановкой».
- Невырожденное локально минимальное дерево имеет n-вершин степень 1 (граничные), и n-2 вершины степени 3 (внутренние).

- Гранью невырожденного локально минимального дерева с границей может являться не более чем 7 угольник.
- Количество треугольных граней в невырожденном локально минимальном дереве с границей не менее 2.
- Для перечисления всех различных топологий невырожденных локально минимальных деревьев достаточно из всевозможных перестановок длины n, состоящих из элементов {3, 4, 5, 6, 7} (элементы есть количество углов грани, то есть перестановки «подозрительные на код»), выбрать те которые являются кодом (то есть, существует дерево с таким кодом).

На основе выше изложенного автором разработан и реализован алгоритм генерации всевозможных топологий локально минимальных невырожденных деревьев с границей из n точек. С помощью этой программы просчитаны топологии и их количество для $n = 5, 6 \dots 15$.

Литература

1. Майника Э. «Алгоритмы оптимизации на сетях»: пер. с английского. – М.: Мир, 1981.
2. Garey M., Johnson D. «A guide to the theory of NP-completeness».
3. Иванов А.О., Тужилин А.А. «Теория экстремальных сетей». ISBN 5-93972-292-X ИКИ 2004 г.

О гиперболоиде вращения

М.А. Чешкова
АлтГУ, г. Барнаул

Гиперповерхность вращения M в евклидовом пространстве E^n зададим в виде

$$\vec{r} = u\vec{e}(v^1,\dots,v^{n-2}) + f(u)\vec{k} \ ,$$

где $\vec{k}$ – орт оси, $\vec{e}$ – орт, ортогональный $\vec{k}$, $u, v^1, \dots, v^{n-2}$ – параметры, f – дифференцируемая функция.

Обозначим через n -орт нормали к поверхности M . Тогда [1]

$$n = \frac{f'e - k}{\sqrt{(f')^2 + 1}},$$

$$n_i = \frac{f'}{u\sqrt{(f')^2+1}} r_i, n_i = \frac{\partial n}{\partial v_i}, i = 1,\dots,n-2, r_i = \frac{\partial r}{\partial v_i},$$