Литература

1. Giraudet M., Rachunek J. Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains, Cechoslovak Math. J., 49(1999), 743-766.

Некоторые свойства косых армендеризовских колец

А.С. Кузьмина

БГПУ, г. Барнаул

На протяжении данной работы слово «кольцо» означает ассоциативное кольцо с единицей.

В 1974 г. Е. Армендериз доказал, что если произведение двух многочленов с коэффициентами из редуцированного кольца (т.е. кольца без ненулевых нильпотентных элементов) равно нулю, то и всевозможные попарные произведения коэффициентов этих многочленов равны нулю. В 1997 г. кольца, удовлетворяющие такому условию, были названы «армендеризовскими» (M.B. Rege, S. Chhawchharia). В 2003 г. в [1] было введено понятие косого армендеризовского кольца.

Определение. *Пусть α – эндоморфизм кольца R. Кольцо R называется α-косым армендеризовским, если для любых многочленов $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ и $g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n \in R[x;\alpha]$, удовлетворяющих условию $f(x)\, g(x)=0$, имеем, что $a_i\, \alpha^i\, (b_j)=0$ для всех $0 \le i \le m$ и $0 \le j \le n$.*

Определение. *Пусть α – эндоморфизм кольца R. Кольцо R называется α-жестким, если для любого элемента $a \in R$ из равенства $a\ \alpha(a) = 0$, следует, что $a = 0$.*

В настоящей работе ряд результатов, известных ранее для армендеризовских колец, обобщен на косые армендеризовские кольца.

Пусть α – эндоморфизм кольца R и R_n – кольцо матриц n-го порядка над R. Определим $\overline{\alpha} : R_n \to R_n$ следующим образом: $\overline{\alpha}\ ((a_{ij}))=(\alpha(a_{ij}))$ для всех $(a_{ij}) \in R_n$.

Пусть $\{e_{ij}\}$ – множество матричных единиц и $n \ge 2$ – некоторое натуральное число. Обозначим через $V = \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1}$. Положим $A_n^e(R) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+i}^{n} \mathrm{R}e_{ij}$ для четного числа $n=2k\ge 2$, а $A_n^o(R) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=k+i}^{n} \mathrm{R}e_{ij}$ для нечетного числа $n=2k+1\ge 3$. Пусть также $A_n(R)= RE + RV + \ldots + RV^{k-1} + A_n^e(R)$ для четного числа $n=2k\geq 2$ и $A_n(R)= RE + RV + \ldots + RV^{k-1} + A_n^o(R)$ для нечетного числа $n=2k+1\geq 3$.

Теорема 1. *Пусть R – α-жесткое кольцо, где α – эндоморфизм кольца R. Тогда кольцо $A_n(R)$ является $\overline{\alpha}$ -косым армендеризовским для любого нечетного числа $n=2k+1\geq 3$ и кольцо $A_n(R)+Re_{1k}$ является $\overline{\alpha}$ -косым армендеризовским для любого четного числа $n=2k\geq 2$.*

Предложение 2. *Пусть α – мономорфизм кольца R. Если кольцо $A_n(R)$ является $\overline{\alpha}$ -косым армендеризовским для некоторого нечетного числа $n=2k+1\geq 3$ или кольцо $A_n(R)+Re_{1k}$ является $\overline{\alpha}$ -косым армендеризовским для некоторого четного числа $n=2k\geq 2$, то кольцо R является α-жестким.*

Пусть I – идеал кольца R, α – эндоморфизм кольца R и $\alpha(I)\subseteq I$. Определим эндоморфизм $\overline{\alpha}:R/I \to R/I$ следующим образом: $\overline{\alpha}(a+I)=\alpha(a) + I$.

Теорема 3. *Пусть α – эндоморфизм кольца R и I – α-жесткий идеал кольца R, такой, что фактор–кольцо R/I является $\overline{\alpha}$ -косым армендеризовским. Тогда кольцо R α–косое армендеризовское.*

Пусть α – автоморфизм кольца R. В случае, когда кольцо R имеет полное классическое правое кольцо частных Q, определим автоморфизм $\overline{\alpha}$ кольца Q следующим образом: $\overline{\alpha}(ab^{-1})= \alpha(a)\,\alpha(b)^{-1}$ (см. [1]).

Предложение 4. *Пусть α – автоморфизм кольца R и кольцо R имеет полное классическое правое кольцо частных Q. Тогда кольцо R является α-косым армендеризовским в том и только в том случае, если кольцо Q $\overline{\alpha}$ -косое армендеризовское.*

Аналогичное утверждение справедливо и для случая, когда кольцо R имеет полное классическое левое кольцо частных Q.

Предложение 5. *Пусть R_ν – армендеризовское кольцо для любого $\nu\in A$, где A – некоторое множество индексов, и пусть F – фильтр на множестве A. Тогда кольцо $R=\prod_{\nu\in A} R_\nu / F$ армендеризовское.*

Литература

1. Hong C.Y., Kim N.K., Kwak T.K. On Skew Armendariz rings // Communications in algebra. – 2003. – Vol. 31. – №1. – PP. 103–122.

2. Hong C.Y., Kim N.K., Kwak T.K. Ore extensions of Baer and p.p.–rings // Journal of Pure and Applied Algebra. – 2000. –151. – PP. 215–226.

3. Huh C., Lee Y., Smoctunowicz A. Armendariz rings and semicommutative rings // Communications in algebra. – 2002. – Vol. 30. – №2. – PP. 751–761.

5. Lee T.-K., Zhou Y. Armendariz and Reduced Rings // Communications in algebra. – 2004. – Vol. 32. – №6. – PP. 2287–2299.

Граф делителей нуля кольца с единицей

А.С. Кузьмина
БГПУ, г. Барнаул

На протяжении данной работы слово «кольцо» означает ассоциативное кольцо с единицей, имеющее ненулевые делители нуля.

Идея построения графа делителей нуля впервые была использована в 1986 г. в работе [2]. И. Бек строил графы делителей нуля для коммутативных колец и занимался, в основном, раскраской таких графов. Вершинами графа делителей нуля в работе [2] считаются все элементы кольца, причем две различные вершины x и y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy=0$.

В 1999 г. Д. Андерсон и Ф. Ливингстон в работе [1] несколько изменили способ построения графа делителей нуля: вершинами графа считались все делители нуля коммутативного кольца. По мнению этих авторов, такое определение лучше иллюстрирует структуру множества делителей нуля кольца.

Мы вводим следующее определение графа делителей нуля. Пусть R– произвольное кольцо. Вершинами графа делителей нуля кольца R будем считать все ненулевые делители нуля кольца, причем две различные вершины x и y соединяем ребром тогда и только тогда, когда $xy=0$ или $yx=0$. Граф делителей нуля кольца R обозначим через $\Gamma(R)$.

Теорема 1. *Пусть R – конечное кольцо (не поле). Граф $\Gamma(R)$ является эйлеровым в том и только в том случае, если* $R \cong \oplus_{i=1}^{s} GF(p_i^{\alpha_i})$, *$p_i \neq 2$ при $i=1,\ldots,s$, $s \geq 2$.*

Двудольный граф G – это граф, множество вершин V которого можно разбить на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 таким образом, что каждое ребро графа G соединяет вершины из разных множеств. Полные двудольные графы будем обозначать $K_{n,m}$, где $n=|V_1|$ и $m=|V_2|$.