АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Квазимногообразие, порожденное почти абелевой группой без кручения

А.И. Будкин
АлтГУ, г. Барнаул

Работа посвящена исследованию квазимногообразий метабелевых групп без кручения с конечными решетками подквазимногообразий. Как обычно, под qG будем понимать квазимногообразие, порожденное группой G, $L(qG)$ – решетка квазимногообразий, содержащихся в квазимногообразии qG.

Зафиксируем целое число f, $f>0$. Полагаем $n = 2^f - 1$. Будем рассматривать следующую группу:

$$G_f = \text{ãð}(x_0, x_1, \ldots, x_n, y; [x_i, x_j] = 1\,(i, j = 0, 1, \ldots, n),$$

$$x_i^y = x_{i+1}\,(i = 0, 1, \ldots, n-1), x_n^y = x_0^{-1}).$$

Теорема. Решетка квазимногообразий *L(qG)* является цепью.

Классификация конечных локальных колец порядка p^6 и характеристики p, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре

Е.В. Журавлев
АлтГУ, г. Барнаул

В работах [1, 2] указано строение конечных локальных колец характеристики p, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности 4, и найдены необходимые и достаточные условия существования изоморфизма между двумя такими кольцами. В настоящей работе автор продолжает исследования по классификации конечных локальных колец порядка p^6 (см. [2]).

Пусть $M = \{z \in F^* \mid \forall x \in F \quad z(1+3\delta x^2) - x\delta(3+\delta x^2) \neq 0\}$ – где δ – некоторый фиксированный элемент $F^* \setminus F^{*2}$, $\delta \neq 1$. Рассмотрим множество функций

$$\mathcal{K} = \{\varphi^{\pm}_{a,c} : M \to F\}, \ \varphi^{\pm}_{a,c}(z) = \frac{\pm az(a^2 + 3\delta c^2) - c\delta(3a^2 + \delta c^2)}{a(a^2 + 3\delta c^2) \mp cz(3a^2 + \delta c^2)}$$

где $a = 0$, $c = 1$ или $a = 1$, $c \in F$. Относительно бинарной операции $(\phi_1 \circ \phi_2)(z) = \phi_1(\phi_2(z))$ $(\phi_1, \ \phi_2 \in \mathcal{K})$ данное множество образует группу, которая действует на множестве *M*. Обозначим через $\mathcal{K} \setminus M$ множество представителей орбит.

Теорема. Пятерки матриц, перечисленные в следующем списке, определяют все попарно неизоморфные конечные локальные кольца порядка p^6 с условиями: $\mathrm{char}\, R = p$, $J(R)^4 = 0$, $\dim_F J(R)/J(R)^2 = 2$, $\dim_F J(R)^2/J(R)^3 = 2$, $\dim_F J(R)^3 = 1$, где $R/J(R) = F$.

а) Если $F = GF(p^r)$, $p \neq 2$, то:

1. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s_1&s_2\end{pmatrix}\right]$ для всех $s_1, \ s_2 \in \{0,1\}$;

2. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$ для всех $s \in \{0, \ 1\}$;

3. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&s\end{pmatrix}\right]$ для всех $s \in \{0, \ 1\}$;

4. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right]$;

5. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$ для всех $s \in \{0, \ 1\}$;

6. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$ для всех $s \in \{0, \ 1\}$;

7. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$ для всех $s \in \{0, \ 1\}$;

8. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right]$ для всех $\varepsilon \in \{1, \ \delta\}$;

9. $\left[\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\-2&-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$ для всех $s \in \{0, \ 1\}$;

10. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1+\beta\\1-\beta&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&s\end{pmatrix}\right]$

для всех $\beta \in F^*$, $s \in \{0,\ 1\}$;

11. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1+\beta\\1-\beta&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1+\beta\\(1-\beta)^2&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1-\beta\\(1+\beta)^2&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right]$

для всех $\beta \in F^*$;

12. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1+\beta\\1-\beta&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1+\beta\\(1-\beta)^2&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1-\beta\\(1+\beta)^2&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right]$

для всех $\beta \in F^*$, $\beta^4 - 1 = 0$;

13. $\left[\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$ для всех $s \in \{0,\ 1\}$;

Кроме того, если $charF = 3$, то дополним список матрицами

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right] \text{ для всех } s \in \{0,\ 1\}.$$

Если множество M не пусто, то дополним список матрицами

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&z\\z&\delta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&z\\z&\delta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$$

для всех $s \in \{0,\ 1\}$, где $z \in \mathcal{K} \setminus M$.

Если найдется элемент $z \in F^*$, такой, что $z \neq \pm 1$, $\dfrac{1-z}{1+z} \notin F^{*3}$, то дополним список матрицами

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&z\\z&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&z\\z&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right] \text{ для всех } s \in \{0,\ 1\}.$$

Если $-1 \in F^{*2}$, то дополним список матрицами

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&s\end{pmatrix}\right]$$

для всех $s \in \{0,\ 1\}$.

Если $-1 \notin F^{*2}$, то дополним список матрицами

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&\sqrt{-\delta}\\\sqrt{-\delta}&-\delta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-\sqrt{-\delta}\\\sqrt{-\delta}&\delta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&s\end{pmatrix}\right]$$

для всех $s \in \{0,\ 1\}$.

Если $-3 \in F^{*2}$, то дополним список матрицами

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1+\beta\\1-\beta&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1+\beta\\(1-\beta)^2&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1-\beta\\(1+\beta)^2&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right],$$

где $\beta = \sqrt{-3} \in F$;

b) Если $F = GF(2)$, то

1. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}s'&s\\s&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}s'&s\\s&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&s_1\\0&s_2\end{pmatrix}\right]$;
2. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}s'&s\\s&s\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}s'&s\\s&s\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&s_1\\0&0\end{pmatrix}\right]$;
3. $\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}s_1&s_1'\\1&s_1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}s_1&s_1'\\1&s_1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&s_2\\0&0\end{pmatrix}\right]$;
4. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}s'&0\\s&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}s'&s\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&ss_1\\0&s's_1\end{pmatrix}\right]$;
5. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}s'&s\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}s'&0\\s&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\ss_1&s's_1\end{pmatrix}\right]$;
6. $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&s\\0&0\end{pmatrix}\right]$;
7. $\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&s\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&s's_1'\\0&s_1+ss_1'\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}s_1+ss_1'&s's_1'\\s_1+ss_1'&s_1+ss_1'\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}s's_1's_2&s's_1's_2\\s's_1's_2&s's_1's_2\end{pmatrix}\right]$;
8. $\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\s&0\end{pmatrix}\right]$

для всех $s,\ s_1,\ s_2 \in \{0,\ 1\}$, $s' = 1 - s$, $s_1' = 1 - s_1$. Всего 32 пятерки матриц.

Итак, в силу вышеприведенной теоремы, а также результатов работ [1, 2] мы можем утверждать, что с точностью до изоморфизма классифицированы все конечные локальные кольца характеристики p, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности 4.

Литература

1. Журавлев Е.В. Конечные кольца, радикал Джекобсона которых в четвертой степени равен нулю // Материалы восьмой краевой конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2005.

2. Журавлев Е.В. О классификации конечных локальных колец порядка p^6 // Материалы восьмой региональной конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2005.

3. Журавлев Е.В. Локальные кольца порядка p^6 с 4-нильпотентным радикалом Джекобсона // Сибирские электронные математические известия [Электронный ресурс]. – 2006. Том 3. – С. 15–59. – Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru.

4. B. Gorbas, G.D. Williams, Rings of order p^5. Part 1. Nonlocal rings // Journal of Algebra. – 2000. – V. 231. – P. 677–690.

5. B. Gorbas, G.D. Williams, Rings of order p^5. Part 2. Local rings // Journal of Algebra. – 2000. – V. 231. – P. 691–704.

Сплетение групп монотонных подстановок

А.В. Зенков

АГАУ, г. Барнаул

Пусть (G, φ) – некоторая m-группа, Ω – некоторое линейно упорядоченное множество и a-реверсивный автоморфизм второго порядка Ω. Тогда говорят (см., например, [1]), что (G, φ) представима порядковыми подстановками Ω, если $G \subseteq Aut\Omega$ и для любого $g \in G$ выполнено $(g)\varphi=aga$. Пусть $L=\{w \in \Omega \mid (w)a>w\}$, $R=\{(l)a \mid l \in L\}$. Очевидно, что множестов точек, неподвижных относительно a, либо пусто, либо состоит из одной точки, которую в дальнейшем будем обозначать через α. Несложно показать, что $\Omega = L \cup \{\alpha\} \cup R$ (если, конечно же, α существует).

В работе вводится понятие сплетения представлений m-групп. Для m-транзитивных представлений доказана

Теорема. Пусть (G, Ω, a) – транзитивная m-группа и $\Omega = L \bigcup \{\alpha\} \bigcup R$. Тогда (G, Ω, a) изоморфно вложима в сплетение двух подходящих m-транзитивных групп подстановок.

Работа выполнена при финансовой поддержке программ «Университеты России», код проекта УР 04.01.002.