Литература

1. Устюжанова А.В. Расчет электромагнитного поля, рассеянного диэлектрическим объектом в полупространстве // Материалы девятой региональной конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2006.

2. Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. – М.: Изд-во МГУ, 1992.

3. Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Численный анализ дифракции радиоволн. – М.: Радио и связь, 1982.

4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.

О формальном подходе к внешнему оцениванию множеств решений интервальных линейных систем

С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск

Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}$$

с интервальными $n \times n$-матрицей $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ и n-вектором правой части $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$ *множеством решений* называется множество

$$\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ для некоторых } A \in \mathbf{A} \text{ и } b \in \mathbf{b} \,\},$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$, когда матрица A и вектор b независимо пробегают $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ соответственно (см., к примеру, [1]). Точное описание множества решений может расти экспоненциально с размерностью системы, а потому является практически невозможным уже при значениях n порядка нескольких десятков. С другой стороны, подобное точное описание на самом деле и не нужно в большинстве реальных ситуаций. Пользователи, как правило, ограничиваются задачами нахождения *оценок*, в том или ином смысле, для множеств решений. Нас здесь будет интересовать нахождение внешней интервальной оценки для множества решений, т.е. задача

Найти интервальный брус $\mathbf{V}$, содержащий множество решений интервальной линейной системы уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.

Одним из подходов к её решению, отличающимся высокой вычислительной эффективностью, является формальный (называемый также формально-алгебраическим) подход, при котором нахождение бруса внешней оценки для Ξ ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$) сводится к вычислению *формального решения* специальной вспомогательной интервальной системы уравнений в рекуррентном виде $x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}$.

Формальным решением интервальной системы уравнений называется интервальный вектор, обращающий её в равенство после подстановки в эту систему и выполнения всех операций по правилам интервальной арифметики, и для интервальных линейных систем уравнений основой формального подхода к внешнему оцениванию множеств решений являются следующие результаты.

Предложение. Пусть Λ – неособенная диагональная $n\times n$-матрица. Множество решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ совпадает с множеством решений интервальной системы $x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}$, где $\boldsymbol{C} = I - \Lambda\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{d} = \Lambda\boldsymbol{b}$.

Теорема Апостолатоса-Кулиша [2]. Если интервальная $n\times n$-матрица $\boldsymbol{C}$ такова, что $\rho(|\boldsymbol{C}|) < 1$, – спектральный радиус матрицы модулей для $\boldsymbol{C}$ меньше единицы, то для любого вектора $\boldsymbol{d}$ интервальная линейная система уравнений

$$x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}$$

имеет единственное правильное формальное решение. Оно может быть найдено как предел итерационного процесса

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} \leftarrow \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{d}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

при любом начальном векторе $\boldsymbol{x}^{(0)}$ и является внешней интервальной оценкой множества решений рассматриваемой интервальной системы.

Сравнительно недавно был получен ещё один результат в этом направлении:

Теорема Майера-Варнке [3]. Пусть $\boldsymbol{C}$ – интервальная $n\times n$-матрица, $\boldsymbol{d}$ – интервальный n-вектор и

$$\Xi = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x = Cx + d \text{ для некоторых } C \in \boldsymbol{C} \text{ и } d \in \boldsymbol{d} \,\}$$

– множество решений интервальной линейной системы $x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}$, а интервальный n-вектор $\boldsymbol{x}^*$ – правильное формальное решение этой системы. Тогда

(i) для любой линейной системы $x = Cx + d$ с $C \in \boldsymbol{C}$ и $d \in \boldsymbol{d}$ по крайней мере одно её решение содержится в брусе $\boldsymbol{x}^*$,

(ii) Ξ содержится в брусе $\boldsymbol{x}^*$ тогда и только тогда, когда интервальная матрица $(I - \boldsymbol{C})$ неособенна.

Может показаться, что теорема Майера-Варнке существенно расширяет сферу приложимости формального подхода, поскольку не накладывает ограничения $\rho(|\boldsymbol{C}|) < 1$ на интервальную матрицу $\boldsymbol{C}$ вспомогательной системы уравнений $x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{d}$. Наша работа посвящена выяснению действительного значения теоремы Майера-Варнке и демонстрирует, что достигаемое с её помощью обобщение на самом деле несущественно и касается лишь экзотических вырожденных случаев.

Литература

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – Москва: Мир, 1987.

2. Apostolatos N., Kulisch U. Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen // Electron. Rechenanl. – 1968. – Bd. 10. – S. 73–83.

3. Mayer G., Warnke I. On the fixed points of the interval function f([x]) = [A][x] + [b] // Linear Algebra and its Applications. – 2003. – Vol. 363. – P. 201–216.