



Сибин Антон Николаевич

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНЫХ
СМЕСЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С ПЕРЕМЕННОЙ
ПОРИСТОСТЬЮ И С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ**

01.02.05 - механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Барнаул

2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования "Алтайский государственный университет".

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Палин Александр Алексеевич.

Официальные оппоненты:

Черных Геннадий Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий», лаборатория математического моделирования, главный научный сотрудник.

Бочаров Олег Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент, Новосибирский Технологический центр «АО Бейкер Хьюз», заместитель директора по научной работе.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук».

Защита диссертации состоится "28" декабря 2021 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 003.054.04 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН) и на сайте www.hydro.nsc.ru.

Автореферат разослан " " 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.054.04, канд. физ.-мат. наук



Прокудин Д. А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Актуальность теоретического исследования моделей механики многофазных сред с переменной пористостью и с учетом фазовых переходов обусловлена их широким применением к решению важных практических задач: ирригации и дренажа сельскохозяйственных полей; фильтрации вблизи речных плотин, дамб и других гидротехнических сооружений; разработки трудноизвлекаемых запасов нефти и газа; движения магмы в земной коре¹; прогноза возникновения и роста опухолей; очистки с помощью фильтров воды, жидкого топлива, смазочных масел.

Многочисленные исследования, проведенные как в нашей стране (В. Н. Николаевский, А. М. Блохин, В. Н. Доровский, Л. С. Кучмент, Г. Г. Ципкин, Ю. М. Шехтман, А. Н. Коновалов и др.), так и за рубежом (К. Terzaghi, S. C. Colbeck, J.M.N.T. Gray, I. Vardoulakis и др.), посвящены фильтрации многофазных смесей. Однако, проведенные до настоящего времени исследования не включали в себя множество задач, в частности, задачи о фильтрации воды и воздуха в тающем снеге и внутренней суффозии с учетом переменной пористости (пористость может изменяться, в частности, из-за деформации пористого скелета²), фазовых переходов и определения скоростей фильтрующихся фаз.

Степень разработанности темы исследования. Результаты систематического исследования динамики многофазных сред изложены в монографиях Р. И. Нигматулина (2014), К. Л. Rajagopal и L. Тао (1995), В. Н. Николаевского (2014). Система дифференциальных уравнений описывающая многофазное течение выводится из законов сохранения массы, импульса и энергии сплошной среды и, как правило, является недоопределенной. Для ее замыкания необходимо конкретизировать величины, описывающие внутрифазные и межфазные массовые, силовые и энергетические взаимодействия. Примерами такой конкретизации служат работы Н. Е. Жуковского, связанные с выводом уравнений фильтрации; Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица по гидродинамике жидкого гелия; С. С. Кутателадзе, М. А. Стыриковича, М. Е. Дейча и Г. А. Филиппова по газожидкостным системам; Н. Н. Яненко, Р. И. Солоухина по сверхзвуковым двухфазным течениям; Я. И. Френкеля, В. Н. Николаевского по деформированию водонасыщенных грунтов и выносу песка в работающую скважину; А. М. Блохина и В. Н. Доровского по

¹Тычков С. А., Червов В. В., Черных Г. Г. О численном моделировании тепловой конвекции в мантии Земли // Доклады Академии наук. –2005. – Т. 402. – № 2. – С. 248-254.

²Bocharov O.B. Rudyak V.Ya., Seryakov A.V. Simplest deformation models of a fluid-saturated poroelastic medium // J. Mining Science. 2014. V. 50. № 2. P. 235–248.

моделям континуальной теории фильтрации, не использующим закон Дарси; С. К. Годунова по термодинамически согласованным моделям многофазных сред; К. Wilmanski по моделированию процессов сорбции в деформируемой пористой среде; И. О. Протодьяконова и Ю. Г. Чеснокова по моделированию движения псевдооживленного слоя; Ю. М. Шехтмана по движению жидкости со взвешенными твердыми частицами через пористые среды; А. Н. Коновалова, Ю. М. Лаевского и А. Д. Ляшко по численному исследованию фильтрации многофазных смесей.

Наиболее полные модели теории движения воды и подвижных твердых частиц в пористой среде предложены в работах I. Vardoulakis³ и его последователей^{4,5}. Грунт в данных работах, с одной стороны, рассматривался как многофазная среда, но в то же время для замыкания системы использовалось предположение пропорциональности скоростей воды и подвижных частиц грунта. В работах П. Г. Бедриковецкого для моделирования процесса внутренней суффозии используются уравнения кинетики⁶. В этом подходе истинная скорость подвижных твердых частиц не определяется, скорость жидкости находится из закона Дарси. Близкая задача двухфазной фильтрации с учетом фазовых переходов возникает при моделировании тающего снега. Основы теории движения воды и воздуха в тающем снеге заложены в работах S.C. Colbeck и его последователей^{7,8}. Несмотря на то, что снег моделировался как многофазная среда, переменная пористость ледового скелета, его деформация и фазовые переходы не учитывались.

Цели и задачи исследования. Целью данной работы является аналитическое и численное исследование процесса взаимопроникающего движения двух сред в пористой среде с переменной пористостью и с учетом фазовых переходов. Разработка математических методов и вычислительных алгоритмов для решения задач, возникающих при исследовании процесса внутренней изотермической эрозии грунта при напорном движении грунтовых вод и тепломассопереноса в тающем снеге.

³Vardoulakis I. et al. Sand Erosion in Axial Flow Conditions // *Transp. Porous Media*. 2001. V. 45. № 2. P. 267–280.

⁴Wang J. et al. Simulation of Cold Heavy Oil Production Using an Integrated Modular Approach with Emphasis on Foamy Oil Flow and Sand Production Effects // *1st Heavy Oil Conf. Beijing*. 2006. P. 424–433.

⁵Chetti A., Benamar A., Hazzab A. Modeling of Particle Migration in Porous Media: Application to Soil Suffusion // *Transport in Porous Media*. 2016. V. 113. № 3. P. 591–606.

⁶Yang Y., Siqueira F.D., Vaz A.S.L., You Z., Bedrikovetsky P. Slow migration of detached fine particles over rock surface in porous media // *J. Natural Gas Science and Engineering*. 2016. V. 34. P. 1159–1173.

⁷Gray J.M.N.T. Water movement in wet snow // *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1996. V.354, N. 1707. P. 465–500.

⁸Sellers S. Theory of water transport in melting snow with a moving surface // *Cold Regions Science and Technology*. 2000. V.2000, N 31. P.47–57.

Научная новизна исследуемых задач состоит в учете переменной пористости вмещающей среды. Рассматриваемые в диссертации задачи осложняются тем, что пористость изменяется в результате фазовых переходов, а фильтрующиеся фазы имеют различные скорости, определяемые в ходе решения задач.

Все результаты являются новыми, подтверждаются строгими рассуждениями с использованием развитого математического аппарата гидродинамики и теории фильтрации.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные результаты носят теоретический и прикладной характер и представляют интерес для специалистов в области гидродинамики, теории фильтрации и уравнений в частных производных. Работа вносит вклад в изучение фильтрации в пористых средах с переменной пористостью и с учетом фазовых переходов. Полученные результаты развивают теорию фильтрации и дополняют результаты изученной ранее задачи движения двухфазной смеси в пористой среде с заданной пористостью (классической модели Маскета–Левверетта).

Полученные результаты могут использоваться для оценки рисков формирования пустот в грунте и образования суффозионных воронок. Результаты работы могут применяться для анализа экспериментов по определению суффозионной устойчивости грунтов и фильтрационных характеристик тающего снега. Модели и методы численного моделирования процессов фильтрации в средах с переменной пористостью позволяют создать новые и усовершенствовать существующие прикладные расчетные комплексы программ.

Методология и методы исследования. В работе применяются математический аппарат механики сплошной среды и теории фильтрации; гидродинамики; уравнений математической физики; общей теории дифференциальных уравнений; методы функционального анализа. Для численного решения задач применялись конечно-разностные методы Рунге–Кутты и переменных направлений для дифференциальных уравнений второго порядка. При реализации конечно-разностных схем использовались метод "замороженных коэффициентов" и методы прогонки, для нахождения решения систем линейных алгебраических уравнений. Для проведения численных расчетов использованы авторские коды на языке C++.

Положения, выносимые на защиту. Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Алтайский государственный университет». На защиту выносятся следующие результаты:

- построена математическая модель фильтрации смеси твердых частиц и

жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии, проведена верификация одномерной модели внутренней эрозии грунта на основе сравнения результатов численных расчетов изменения эродированной массы (частиц грунта вынесенных из области фильтрации) и экспериментальных данных из литературных источников для трех грунтов с различной суффозионной устойчивостью;

– для профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое при заданной концентрации подвижных частиц грунта в фильтрующемся потоке найдена область, подверженная внутренней эрозии;

– выведена математическая модель фильтрации воды и воздуха в тающем снеге с переменной пористостью и с учетом фазового перехода, проведено сравнение результатов моделирования изменения водонасыщенности талого снега, состоящего из двух слоев с разной плотностью, и экспериментальных данных из литературных источников;

– доказана глобальная разрешимость начально-краевой задачи для невырожденных уравнений внутренней эрозии при заданной суммарной скорости фильтрации.

Степень достоверности и апробация результатов. Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций достигается: использованием классических подходов механики сплошных сред, гидродинамики и теории фильтрации при построении и анализе математических моделей; проверкой корректности результатов численных расчетов различными способами: устойчивость и порядок сходимости вычислительного алгоритма проверяются путем вычислительных экспериментов, применяя известное правило Рунге; путем сравнения результатов вычислений с экспериментальными данными из литературных источников; опубликованием результатов исследований в ведущих журналах и обсуждением результатов на международных и всероссийских конференциях. Основные результаты работы докладывались на семинарах:

ФИЦ ИВТ СО РАН "Информационно-вычислительные технологии"(руководители: академик Ю.И. Шокин, д.ф.-м.н. В.М. Ковеня и д.ф.-м.н. В.Б. Барахнин), Новосибирск, 2021; ИВМ СО РАН "Математическое моделирование в механике" (руководители: д.ф.-м.н. В. К. Андреев, д.ф.-м.н. В. М. Садовский), Красноярск, 2021; ИГиЛ СО РАН "Математические модели механики сплошных сред" (руководители: член.-корр. РАН П.И. Плотников, д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтов), Новосибирск, 2021; ИГиЛ СО РАН "Прикладная гидродинамика" (руководители: член.-корр. РАН В.В. Пухначев и д.ф.-м.н. Е.В. Ерманюк), Новосибирск, 2021; ИМ СО РАН

”Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики” (руководитель: д.ф.-м.н. Д.Л. Ткачев), Новосибирск, 2021; ”Задачи индустриальной и прикладной математики” (руководитель: д.ф.-м.н. А.А. Папин), Барнаул, 2016-2021; кафедры дифференциальных уравнений Алтайского государственного университета, Барнаул, 2016-2021.

А также на следующих научных конференциях:

VI Всероссийская научная конференция "Теплофизика и физическая гидродинамика"(Севастополь, 2021); Всероссийская конференция с участием зарубежных учёных по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, посвященная 100-летию со дня рождения Н. Н. Яненко (Красноярск, 2021); Международный молодежный научный форум "ЛОМОНОСОВ-2021" (Москва, 2021); IX Международная конференция, посвященная 120-летию со дня рождения академика М. А. Лаврентьева (Новосибирск, 2020); Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения"(Красноярск 2020, Барнаул 2017, Бийск, 2014); Всероссийская конференция с международным участием и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В. Овсянникова "Математические проблемы механики сплошных сред"(Новосибирск, 2019); Международная школка-конференция "Соболевские чтения"(Новосибирск 2016, 2018); Международная школка-семинар "Ломоносовские чтения на Алтае" (Барнаул, 2012–2018); Всероссийская конференция с международным участием "Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва" посвященная 60-летию ИГиЛ СО РАН (Новосибирск, 2017); Всероссийская конференция «Нелинейные волны: теория и приложения» посвященная 70-летию со дня рождения В. М. Тешукова (Новосибирск, 2016).

Основные результаты диссертации опубликованы в 11 печатных изданиях [1-11], 9 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 4 – в журналах, индексируемых в Web of Science или Scopus.

Личный вклад. Автор диссертации принимал активное участие в получении результатов, отражённых во всех совместных публикациях на равноправной основе: постановке задачи, численном исследовании, обсуждении полученных результатов, а также оформлении результатов в виде публикаций и научных докладов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 113 страниц. Диссертация содержит 23 рисунка. Список литературы содержит 121 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность задач двухфазной фильтрации в пористых средах с переменной пористостью и с учетом фазовых переходов, дается обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цели и задачи работы, а также ее научная новизна и практическая значимость, представлены основные положения, выносимые на защиту, обоснована достоверность результатов и описан личный вклад автора работы.

Первая глава диссертации посвящена численному исследованию одномерной задачи фильтрации смеси воды ($i=1$) и твердых подвижных частиц (псевдооживленное состояние $i = 2$) в недеформируемом грунте ($i = 3, \vec{u}_3 = 0$ – скорость пористой среды) при постоянной температуре в потоке и с учетом процессов внутренней суффозии. Следуя общепринятым положениям, грунт можно характеризовать двумя параметрами⁹: средним диаметром частиц d и степенью неоднородности $\eta = d_{60}/d_{10}$ (по Хазену), где d_{60} – контролирующий диаметр, меньше которого в данном грунте содержится 60% частиц по массе; d_{10} – эффективный диаметр, меньше которого содержится 10% частиц. Если через слой неподвижных твердых частиц (со степенью неоднородности $\eta > 10$)¹⁰ пропускать восходящий поток жидкости (или газа), постепенно увеличивая его скорость, то при определенной скорости, называемой критической, мелкая фракция перейдет в псевдооживленное состояние¹¹. При этом мелкие твердые частицы приобретут подвижность и будут перемещаться между более крупными частицами (процесс внутренней суффозии). Приведенные в монографии¹⁰ данные измерений устойчивости разнородных грунтов показывают, что при $\eta < 10$ суффозия практически отсутствует и слой переходит в псевдооживленное состояние без выделения мелких частиц. При $\eta > 20$, напротив, происходит интенсивная суффозия мелкозернистого “наполнителя” задолго до того, как основной “скелет” из крупнозернистых частиц потеряет устойчивость.

В настоящей работе рассматриваются процессы фильтрации подземных вод и внутренней механической суффозии в грунтах со степенью неоднородности $\eta > 20$. Грунт моделируется как трехфазная сплошная пористая среда. Поры полностью заполнены смесью воды и подвижных частиц грунта. Доля пор в грунте определяется пористостью ϕ .

В разделе 1.1 приведена постановка трехмерной задачи ($\vec{x} = (x, y, z)$,

⁹Тодес О. М., Цитович О. Б. Аппараты с кипящим зернистым слоем: Гидравлические и тепловые основы работы. – Ленинград: Химия, 1981. – 296 с.

¹⁰Истомина В.С. Фильтрационная устойчивость грунтов. М.: Госстройиздат, 1957. 295 с.

¹¹Протождьяконов И.О., Чесноков Ю.Г. Гидромеханика псевдооживленного слоя. Л.: Химия, 1982. 264 с.

$\vec{x} \in \Omega \subset R^3$, $t \in (0, T)$) и сделан вывод системы уравнений. В основе математической модели лежат уравнения сохранения массы каждой фазы

$$\frac{\partial(s\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (s\phi\vec{u}_1) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(1-s)\phi}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-s)\phi\vec{u}_2) = \frac{I}{\rho_2^0}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -\frac{I}{\rho_3^0} \quad (3)$$

и обобщенный закон Дарси

$$\vec{v}_i \equiv s_i\phi\vec{u}_i = -K_0(\phi)k_{0i}(\nabla p_i - \rho_i^0\vec{g}), \quad k_{0i} = \bar{k}_{0i}/\mu_i, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Здесь $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ – оператор градиента; \vec{u}_1, \vec{u}_2 – соответственно истинные скорости воды и подвижных твердых частиц грунта; s_1, s_2 – концентрации воды (водонасыщенность) и подвижных частиц грунта (введено обозначение $s_1 = s$, тогда $s_2 = 1 - s$); $\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0$ – истинные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта (плотности ρ_i^0 постоянны). В рассматриваемом случае $\rho_3^0 = \rho_2^0$, так как подвижные частицы захватываются суффозионным потоком из грунта; I – интенсивность суффозионного процесса; $K_0(\phi)$ – симметричный тензор проницаемости пористой среды; \bar{k}_{0i} – коэффициенты относительной фазовой проницаемости, обладающие свойствами $\bar{k}_{0i} = \bar{k}_{0i}(s_i) \geq 0, \bar{k}_{0i}|_{s_i=0} = 0, 0 \leq s_i \leq 1$; μ_i – коэффициенты динамической вязкости; \vec{g} – ускорение силы тяжести. Эффективная динамическая вязкость псевдооживленных частиц грунта¹² и коэффициенты $K_0(\phi), \bar{k}_{0i}$ могут быть измерены экспериментально¹³.

Существуют различные подходы замыкания системы (1) – (4): I. Vardoulakis использовал гипотезу $v_1 = \beta v_2$ ($0 < \beta < 1$), т.е. постулировалось, что модуль скорости частиц грунта меньше модуля скорости фильтрации воды³. В работе¹⁴ вводится понятие эффективного давления жидкости p^e и эффективного давления псевдооживленной фазы p^{se} , так что давление жидкости есть $p_1 = sp^e$, а давление твердых подвижных частиц $p_2 = (1-s)p^{se}$, причем $p^e = p^{se} + p_c(s)$ и функция $p_c(s)$ обладает свойствами $p_c(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0, p_c(1) = 0$. Следуя изложенному выше подходу, положим

$$p_2 - p_1 = p_c(s). \quad (5)$$

¹²Гельперин Н.И., Айнштейн В.Г., Кваша В.Б. Основы техники псевдооживления. М., 1967. 177 с.

¹³Бэр Я. Физико-математические основы фильтрации воды. М., 1971. 452 с.

¹⁴Garg S.K., Pritchett J.W. Dynamics of gasfluidized beds // J. Appl. Phys. 1975. V. 46. P. 4493–4450.

Здесь p_c – заданная функция, обладающая свойствами

$$p_c(s) > 0, \quad p_c(1) = 0, \quad \frac{\partial p_c}{\partial s} < 0, \quad p_c(s) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow 0.$$

Известны различные постановки задачи о фильтрации двухфазной жидкости в пористой среде с заданной пористостью (классическая модель Маскета–Леверетта). J. Jr. Douglas, D. W. Peaceman, Jr. Rachford в качестве искомого брались потенциалы $\Phi_i = p_i + \rho_i gh$, ($\vec{g} = g\nabla h$). Теми же авторами использовались переменные $P = (\Phi_1 + \Phi_2)/2$ и $R = (\Phi_1 - \Phi_2)/2$. В плоском случае А.Н. Коновалову принадлежит постановка задачи в переменных s и ψ (ψ – функция тока суммарного течения). В большинстве работ, посвященных моделированию внутренней суффозии, параболическое уравнение для водонасыщенности получают добавлением диффузионного слагаемого³, а система замыкается гипотезой пропорциональности скоростей фильтрующихся фаз. При таком подходе усложняется анализ качественных свойств математической модели, в частности, проверка физического принципа максимума для концентрации подвижных частиц грунта. Наиболее эффективным при качественном исследовании системы (1) – (4) (пористость предполагалась заданной, $I = 0$) оказалось использование С.Н. Антонцевым и В.Н. Монаховым в качестве искомого функций насыщенности s и "приведенного" давления¹⁵ p :

$$p = p_2 + \int_s^1 \frac{k_{01}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi, \quad k(s) = k_{01} + k_{02}. \quad (6)$$

Особенностью рассматриваемой задачи (1) – (4) является переменная пористость. С учетом соотношений (5) и (6) система (1) – (4) сводится к следующей эквивалентной форме (искомыми функциями являются s , p и ϕ):

$$\frac{\partial s \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (a \nabla s + b \vec{v} + \vec{F}) \equiv -\nabla \cdot \vec{v}_1, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot (K_0(\phi) k(s) \nabla p + \vec{f}) \equiv \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (8)$$

$$\rho_3^0 \frac{\partial(1 - \phi)}{\partial t} = -I. \quad (9)$$

Коэффициенты последней выражаются через функциональные параметры исходной системы, причем $\vec{f}(s, \phi) = -K_0 \vec{g}(k_{01} \rho_1^0 + k_{02} \rho_2^0)$, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$,

$$a(s, \phi) = -K_0 \frac{k_{01} k_{02}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s}, \quad b(s) = \frac{k_{02}}{k}, \quad \vec{F}(s, \phi) = \frac{k_{01} k_{02} K_0 \vec{g}}{k} (\rho_2^0 - \rho_1^0).$$

¹⁵ Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 320 с.

Проницаемость пористой среды $K_0(\phi)$ является положительно определенным тензором второго ранга. Относительные фазовые проницаемости $k_{0i}(s)$ неотрицательны и их сумма k положительна. Поэтому $a(s, \phi) > 0$ при $s \in (0, 1)$ и $a(0, \phi) = a(1, \phi) = 0$, т.е. система (7) – (9) состоит из равномерно эллиптического уравнения для p , уравнения первого порядка для ϕ и вырождающегося при $s = 0$ и $s = 1$ параболического уравнения для s .

В разделе 1.2 рассмотрены различные зависимости для интенсивности обмена массой между пористым скелетом и твердыми подвижными частицами грунта. Главной причиной фильтрационных деформаций и фильтрационных разрушений грунтов является вынос частиц грунта из области фильтрации.

Суффозионный процесс начинается после достижения модулем скорости фильтрации критического значения v_k . К. Терцаги (1922) получил условие равновесия грунта в виде $I_* = (\gamma - 1)(1 - \phi)$, где I_* – критический градиент напора, при котором грунт находится во взвешенном состоянии; γ – удельный вес грунта. В работе⁴ J. Wang для интенсивности суффозионного процесса используется зависимость

$$I = \begin{cases} \lambda \rho_3^0 \phi (1 - \phi) (1 - s) |\vec{v}|, & |\vec{v}| \geq v_k; \\ 0, & |\vec{v}| < v_k, \end{cases} \quad (10)$$

где λ – функция, определяемая экспериментально⁵ (отвечает за устойчивость грунта суффозионному воздействию и в дальнейшем предполагается постоянной). В работе³ I. Vardoulakis использовал аналог соотношения (10) (рассматривался частный случай $|\vec{v}_1| > v_k$).

В разделе 1.3 система уравнений (7) – (9) в одномерном случае приводится к безразмерному виду и предлагается алгоритм решения одномерной задачи фильтрации грунтовых вод с учетом внутренней суффозии. При аппроксимации уравнения (7) за основу взята разностная схема используемая в работе¹⁶ для модели Маскета–Левретта с использованием направленной разности для конвективного слагаемого. Уравнение (8) аппроксимируется неявной схемой второго порядка точности. Уравнение (9) аппроксимируется неявной схемой Рунге–Кутты второго порядка точности.

В разделе 1.4 приведены результаты численного моделирования. Для верификации предложенной математической модели (7) – (9) используется результаты эксперимента, представленного в работе⁵. Экспериментальная установка состоит из резервуара, наполненного жидкостью, и создающего гидравлическую нагрузку, приложенную к горизонтальной трубе, заполненной об-

¹⁶Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – Новосибирск: Наука, 1988. – 166 с.

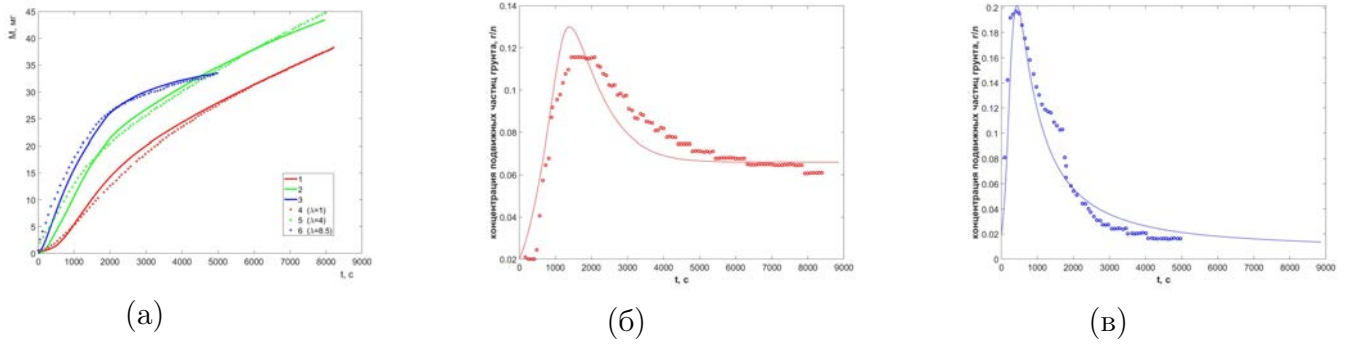


Рис. 1: (а): результаты численного моделирования (1-3); 4-6 – экспериментальные данные⁵ для $\lambda = 1, 4, 8.5$. ; M – эродированная масса грунта, t – время. Результаты численного моделирования изменения концентрации псевдооживленных частиц (прямая линия) и экспериментальные данные (точки): $\lambda = 1$ (б), $\lambda = 8.5$ (в) при $x = 123$ мм.

разцом грунта. В ходе эксперимента были исследованы несколько образцов грунта с разной суффозионной устойчивостью (за суффозионную устойчивость грунта отвечает параметр λ). Суффозионные тесты были проведены для смеси крупного песка, размеры частичек которого изменялись между 0.315 и 1.60 мм, и мелких частиц, размеры которых изменялись от 1 до 80 микрон. Концентрация мелких частиц в смеси песка изменялась от 2 до 8 процентов от веса.

На Рисунке 1 представлено сравнение рассчитанных значений вынесенной массы из области фильтрации и концентрации подвижных частиц грунта с экспериментальными данными из работы⁵.

В разделе 1.5 изложен метод определения приближенного (экспериментального) порядка сходимости разностного решения. В разделе 1.6 приводится пример тестирования численного алгоритма путем определения экспериментальных порядков сильной и слабой сходимости.

В разделе 1.7 численно исследована одномерная задача внутренней суффозии грунта при заданной суммарной скорости фильтрации. Краевые и начальные условия задавались следующим образом:

$$s(0, t) = s_0(t), \quad s(1, t) = s_1(t), \quad s(x, 0) = s^0(x), \quad \phi(x, 0) = \phi^0(x). \quad (11)$$

Проведено сравнение двух эмпирических зависимостей для интенсивности суффозионного процесса.

Во **второй главе** доказана теорема существования и единственности классического решения первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии при заданной суммарной скорости фильтрации и условии $|\vec{v}| > v_k$. В разделе 2.1 приведены необходимые сведения из функционального анализа и теории дифференциальных уравнений.

В разделе 2.2 приводится постановка задачи и формулируется теорема об однозначной классической разрешимости.

Теорема. Пусть данные одномерной задачи (7), (9) и (11) подчиняются условиям:

1. функции $K_0(\phi)$, $a(s)$, $b(s)$, $F(s, \phi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $s \in [0, 1]$, $\phi \in (0, 1)$ и удовлетворяют условиям $0 < m \leq K_0$, $a(s) \leq M < \infty$, $F(s, \phi) = 0$ при $s < 0$, $s > 1$.

2. функции $v(t)$, $s_0(t)$, $s_1(t)$, $s^0(x)$, $\phi^0(x)$ удовлетворяют условиям гладкости $v(t), s_0(t), s_1(t) \in C^{2+\alpha}[0, T]$; $s^0(x), \phi^0(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{Q})$ и условиям согласования $s_0(0) = s^0(0)$, $s_1(0) = s^0(1)$, а также удовлетворяют неравенствам $|v(t)| > v_k$, $0 \leq s^0(x) \leq 1$, $0 < m_0 \leq \phi^0 \leq M_0 < 1$, $0 \leq s_0(t) \leq 1$, $0 \leq s_1(t) \leq 1$ где m_0, m, M, v_k, M_0 – известные положительные постоянные; Q – ограниченная область с кусочно-гладкой границей S ($Q_t = Q \times (0, t)$, $\bar{Q} = Q \cup S$).

Тогда для любого конечного интервала $(0, T)$ задача (7), (9) и (11) имеет единственное классическое решение: $\phi(x, t), s(x, t) \in C^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(Q_T)$. Более того $0 \leq s(x, t) \leq 1$, $0 < \phi(x, t) < 1$, $(x, t) \in Q_T$.

В разделе 2.3 изложены вспомогательные леммы, в том числе установлены физические принципы максимума для насыщенности воды и пористости. Ключевым моментом является доказательство гельдеровской непрерывности насыщенности. После этого проверяются условия теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Третья глава диссертации посвящена двумерной математической модели изотермической внутренней эрозии. В разделе 3.1 приведена постановка задачи фильтрации подземных вод в водоносном горизонте, который соприкасается с промерзшим песчаным грунтом. В процессе оттаивания грунта и при достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения и образование подземных полостей. В результате увеличения и достижения критических размеров этих полостей происходит обрушение свода многолетнемерзлых пород. Математическая модель описывается уравнениями сохранения массы для воды, подвижных твердых частиц и неподвижного пористого скелета, законом Дарси для воды и подвижных твердых частиц (аналог классической модели Маскета–Левретта) и соотношением для интенсивности суффозионного потока. В разделе 3.2 рассмотрена двумерная задача изотермической фильтрации в недеформированном грунте при заданной концентрации подвижных твердых частиц в фильтрующемся потоке. Приведены результаты численного исследования процесса внутренней суффозии в межмерзлотном водоносном горизонте и найдена область, подверженная внутренней суффозии. В разделе 3.3

системы уравнений (7) – (9) в двумерном случае приводится к безразмерному виду и рассматривается алгоритм решения двумерной задачи фильтрации грунтовых вод с учетом внутренней суффозии в верхних слоях почвогрунтов.

Четвертая глава посвящена исследованию тепломассопереноса в тающем снеге. Разработан алгоритм численного решения одномерной задачи, проведены численные расчеты и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными¹⁷.

В разделе 4.1 приведена постановка задачи. Тающий снег рассматривается как сплошная среда, состоящая из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$) и льда ($i = 3$), составляющего твердый пористый скелет⁸. Фильтрация воды и воздуха в пористом ледовом скелете описывается уравнениями сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазовых переходов⁷, уравнениями двухфазной фильтрации и уравнением теплового баланса для трехфазной среды¹⁸

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^3 I_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, \quad I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} = 0; \quad (12)$$

$$\phi s_i (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta); \quad (13)$$

$$\left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i \alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^0 \alpha_i c_i \vec{u}_i \right) \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) - \nu I_{13}. \quad (14)$$

Здесь \vec{u}_i – скорость i -й фазы; ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ (условие $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$ является следствием определения ρ_i); I_{ji} – интенсивность перехода массы из j -й в i -ю составляющую в единице объема в единицу времени; ϕ – пористость снега; s_1, s_2 – насыщенности воды и воздуха ($\alpha_1 = \phi s_1, \alpha_2 = \phi s_2, \alpha_3 = 1 - \phi, s_1 + s_2 = 1$, в дальнейшем $s_1 = s, s_2 = 1 - s$); $K_0(\phi)$ – тензор проницаемости пористой среды; \bar{k}_{0i} – относительные фазовые проницаемости ($\bar{k}_{0i} = \bar{k}_{0i}(s_i) \geq 0, \bar{k}_{0i}|_{s_i=0} = 0$); $\mu_i = \text{const} > 0$ – динамические вязкости; p_i – давления фаз; p_c – капиллярное давление, \vec{g} – вектор ускорения силы тяжести; θ – температура среды ($\theta_i = \theta, i = 1, 2, 3$), $c_i = \text{const} > 0$ – удельная теплоемкость i -й фазы при постоянном объеме; $\nu = \text{const} > 0$ – удельная теплота плавления льда; λ_c – теплопроводность снега.

¹⁷Waldner P. A., Schneebeli M., Schultze-Zimmermann U., Fluhler H. Effect of snow structure on water flow and solute transport // Hydrological processes. 2008. V. 18 . N.7. P. 1271-1290.

¹⁸Кучмент Л. С. Речной сток (генезис, моделирование, предвычисление). – М.: 2008. 394 с.

Система (12) – (14) дополняется гипотезами $\vec{u}_3 = 0$ (частицы льда неподвижны, структура льда как сплошной среды не уточняется), $I_{12} = 0$, $I_{23} = 0$ (сублимацией и обменом массами между водой и воздухом пренебрегаем), $I_{31} = I$, $\rho_i^0 = \text{const} > 0$, $i = 1, 2, 3$.

В рассматриваемом подходе важным моментом является корректное определение интенсивности фазового перехода "лед-вода". Следует отметить, что для моделирования интенсивности фазового перехода, как правило, используется методология задачи Стефана, т.е. предполагается, что существует межфазная граница, на которой при определенной температуре скачком происходит переход льда в воду. При таком подходе не требуется задавать интенсивность фазового перехода. Другой подход к процессу таяния снега подразумевает, что фазовый переход "лед-вода" происходит во всей толще снежно-ледового покрова и для описания распространения тепла нужно использовать уравнение вида (14) с соответствующей правой частью. Близкой по проблематике является задача тепломассопереноса в промерзающих (промерзающих) грунтах¹⁹. Имеется ряд экспериментальных результатов по зависимости концентрации льда в пористой среде от температуры²⁰. Используемые в данной работе зависимости для интенсивности фазового перехода "лед-вода" опираются на идеи работ^{19,21}:

$$I = \begin{cases} -\lambda_1 \phi \theta s, & \theta < \theta^-; \\ 0, & \theta^- \leq \theta \leq \theta^+; \\ \lambda_2 (1 - \phi)^2 \exp(\beta(\theta - \theta^+)), & \theta > \theta^+. \end{cases}$$

Здесь θ^+ – температура плавления льда, θ^- – температура замерзания воды, β , λ_1 , λ_2 – размерные постоянные, характеризующие интенсивность фазового перехода ($[\beta]=1/\text{K}$, $[\lambda_1]=\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{K})$, $[\lambda_2]=\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$).

В разделе 4.2 сделан обзор используемых эмпирических зависимостей для капиллярного давления, коэффициентов проницаемости и теплопроводности снега. Показано хорошее совпадение с экспериментальными данными из литературных источников коэффициента теплопроводности снега.

Раздел 4.3 посвящен преобразованию системы уравнений (12) – (14). Преобразованная система уравнений при заданном I рассматривается относительно s , θ , ϕ и приведенного давления p (см. формулу (6)).

¹⁹Нерсесова З. А. Изменение льдистости грунтов в зависимости от температуры //ДАН СССР. 1950. Т. 75. №. 6. С. 845-846.

²⁰Белолыпецкий В. М., Генова С. Н., Туговиков В. Б., Шокин Ю. И. Численное моделирование задач гидроледотермики водотоков. – Новосибирск: СО РАН Институт вычислительных технологий. 1993. С. 138.

²¹Колесников А. Г. К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта //Доклады Академии Наук СССР. 1953. Т. LXXXII, № 6. С. 889–891.

В разделе 4.4 преобразованные уравнения системы (12) – (14) приводятся к безразмерному виду и рассматривается алгоритм решения одномерной задачи фильтрации воды в тающем снеге.

Верификации рассматриваемой модели в одномерном случае посвящен раздел 4.5. В работе¹⁷ экспериментально исследовалось движение воды в тающем снеге. Два вида снега были упакованы слоями в контейнеры. Первый контейнер заполнялся сначала крупнозернистым снегом с плотностью $480 \pm 8 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$, а затем мелкозернистым с плотностью $540 \pm 8 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$. Второму контейнеру наоборот, сначала заполняли мелкозернистым, а потом крупнозернистым снегом. Датчики, измеряющие влажность, располагались на высоте 17, 14.5 и 5 см от дна контейнеров, соответственно. В дальнейшем будем называть эти датчики верхний, средний и нижний. Датчики температуры были только на нижнем уровне (5 см от дна контейнеров). Процесс таяния инициировался с помощью четырех инфракрасных ламп (100 Вт), установленных над каждым контейнером.

На Рисунке 2 представлены результаты численного моделирования первого (а) и второго (б) экспериментов. Лампы работали 180 минут. В период нагрева верхний датчик уловил увеличение концентрации воды в снеге. Верхний

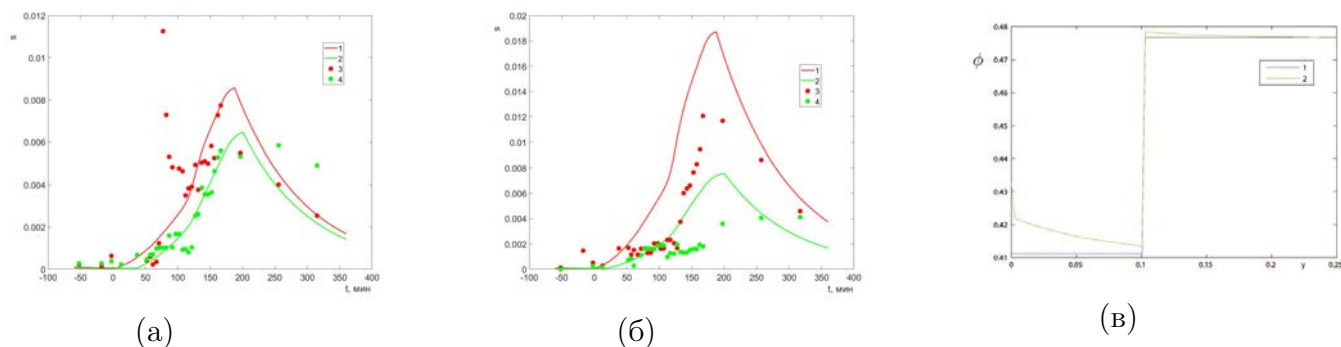


Рис. 2: Результаты численного моделирования изменения водонасыщенности s (1-2) и экспериментальные данные для первого эксперимента (3 – измерения верхнего датчика, 4 – измерения среднего датчика) (а) и второго эксперимента (б). Результаты численного моделирования распределения пористости ϕ по глубине для первого эксперимента 1 – в начальный момент времени, 2 – после завершения эксперимента (в).

датчик стоял выше границы раздела двух слоев снега. Так как сверху лежал крупнозернистый слой (пористость больше), то на верхнем участке скорость воды больше и на границе раздела двух слоев формируется насыщенная водой область. Математическая модель хорошо описывает период постепенного таяния снега в верхнем слое (от 50 до 120 мин) и формирование слоя, насыщенного водой. Несовпадение экспериментальных данных и численного моделирования в период от 150 до 250 мин (см. Рисунок 2б) может быть связано

с неоднородностью снега. Увеличение концентрации воды в период от 150 до 250 мин, зафиксированное нижним датчиком, скорее всего связано с формированием в снеге областей с большей пористостью (предпочтительных путей фильтрации). На верхнем слое данный эффект имеет меньшее влияние, протаивание происходит более равномерно. На Рисунке 2в показано изменение пористости снега за время проведения первого эксперимента.

Как правило, при моделировании теплообмена поверхности земли (снежного покрова)²² и водоемов^{23,20} с атмосферой на границе раздела задают граничное условие третьего рода: $\lambda_c \frac{\partial \theta}{\partial y} - \alpha_c (\theta - \theta_a) = q$, где α_c – коэффициент теплообмена, θ_a – температура воздуха, q – заданный поток тепла.

В заключении приведены основные результаты работы:

1. Построена замкнутая математическая модель фильтрации смеси твердых частиц и жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии, в рамках модели численно решена одномерная задача внутренней суффозии, проведено исследование сходимости метода и сравнение изменения эродированной массы и экспериментальных данных из литературных источников для трех грунтов с различной суффозионной устойчивостью.

2. Доказана глобальная теорема существования и единственности классического решения начально-краевой задачи для невырожденных уравнений внутренней эрозии.

3. На основе уравнений двухфазной фильтрации с учетом суффозионных процессов исследована профильная задача внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое при заданной концентрации подвижных частиц грунта. Определена область, подверженная внутренней эрозии грунта.

4. Построена математическая модель тепломассопереноса в тающем снеге. В рамках полученной модели численно решена одномерная задача фильтрации воды и воздуха в тающем снеге, исследовано изменение пористости и водонасыщенности снега. Используя экспериментальные данные из литературных источников проведена верификация математической модели фильтрации воды и воздуха в тающем снеге, состоящем из двух слоев с разной плотностью.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Сибин А. Н., Папин А. А. Тепломассоперенос в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. – 2021. – Т. 62, № 1. – С. 109 – 118.*

²²Красс М. С., Мерзликин В. Г. Радиационная теплофизика снега и льда. — Ленинград: Гидрометеоздат, 1990. — 261 с.

²³Бекежанова В. Б. Устойчивость неизотермических жидкостей в различных моделях конвекции: дис. ... д-р физ.-мат. наук: 01.02.05. Красноярск. Ин-т вычислительного моделирования СО РАН, 2015.—268 с.

2. Папин А. А., Сибин А. Н. Моделирование движения смеси твердых частиц и жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. – 2019. – № 4. – С. 82 – 94.
3. Sibin A. Numerical study of a mathematical model of internal erosion of soil // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2017. Vol. 894, No. 1. – 012085.
4. Papin A. A., Sibin A. N. Model isothermal internal erosion of soil // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2016. – Vol. 722, No. 1. – 012034.
5. Папин А. А., Сибин А. Н., Шиммарев К. А. Модель изотермической внутренней эрозии в деформируемом грунте // *Изв. Алтайского государственного университета*. – 2017. – № 4 (96). – С. 131–135.
6. Сибин А. Н., Сибин Н. Н. Численное решение двумерной задачи фильтрации в верхних слоях почвогрунтов с учетом суффозионных процессов // *Изв. Алтайского государственного университета*. – 2017. № 4 (96). – С. 146 – 149.
7. Сибин А. Н., Сибин Н. Н. Численное решение одномерной задачи фильтрации с учетом суффозионных процессов // *Изв. Алтайского государственного университета*. – 2017. № 1 (93). – С. 123 – 126.
8. Папин А. А., Сибин А. Н. О разрешимости первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии // *Изв. Алтайского государственного университета*. – 2015. – № 1-2 (85). – С. 136 – 140.
9. Папин А. А., Вайгант В. А., Сибин А. Н. Математическая модель изотермической внутренней эрозии // *Изв. Алтайского государственного университета*. – 2015. – № 1-1 (85). – С. 98 – 93.
10. Кузиков С. С., Папин А. А., Сибин А. Н. Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое // *Изв. Алтайского государственного университета*. – 2014. – № 1-2 (81). – С. 41 – 44.
11. Папин А. А., Гагарин Л. А., Сибин А. Н. Шепелев В. В., Хворых Д. П. Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолетнемерзлыми породами // *Изв. Алтайского государственного университета*. – 2013. – № 1-2 (77). – С. 38 – 41.

Издательская лицензия ЛР 020261 от 14.01.1997.

Подписано в печать 12.10.2021 г.

Формат $60 \times 84^{1/16}$. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 1,16. Тираж 100 экз. Заказ 400.

Типография Алтайского государственного университета:

656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66.