1) поверхность огибающей M_+ является плоскостью;
2) поверхность огибающей M_- является плоскостью;
3) поверхность центров M является плоскостью;
4) $\nabla_j \rho_i = 0$.

Литература

1. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. – М.,1963.
2. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М., 1974.

Обобщенное неравенство Пуанкаре на областях Джона общих групп Карно

Е.А. Плотникова

НГУ, г. Новосибирск

Работа посвящена вопросам теории пространств Соболева на неголономных многообразиях. Более конкретно, доказывается обобщенное неравенство Пуанкаре на областях Джона, при условии выполнения слабого неравенства Пуанкаре для шара на общих группах Карно.

Общей группой Карно G называется связная односвязная нильпотентная группа Ли, алгебра Ли V которой градуирована, т.е.

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m,$$

где $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $1 \le k \le m-1$, $[V_1, V_m] = 0$.

Левоинвариантные векторные поля $X_1, \ldots, X_{n_1}$, называемые горизонтальными, образуют базис V_1. Пусть $\dim V_1 = n_1 \ge 2$, $\dim V_k = n_k$ для $1 \le k \le m-1$ и $N = n_1 + \ldots + n_m$.

Область называется областью Джона $\left(U \in J(\alpha, \beta), 0 < \alpha \le \beta < \infty\right)$, если существует выделенная точка $p_0 \in U$ такая, что для любой точки $p \in U$ существует спрямляемая кривая $\gamma(s)$, $0 \le s \le l \le \beta$, для которой $\gamma(0) = p$, $\gamma(l) = p_0$ и $dist\left[\gamma(s), \partial U\right] \ge \frac{\alpha s}{l}$, для любого $s \in [0,1]$.

Пространство Соболева $W_p^k(\Omega)$ состоит из суммируемых на Ω функций, имеющих обобщенные производные вдоль горизонтальных векторных полей и конечную норму:

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{|\lambda|_h=k} \left\|X^\lambda f\right\|_{L_p(\Omega)},$$

где $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N)$ - мультииндекс, для которого введена норма
$|\lambda|_h = \lambda_1 + ... + \lambda_{n_1} + 2\lambda_{n_1+1} + ... + 2\lambda_{n_1+n_2} + ... + m\lambda_{n_1+...+n_{m-1}+1} + ... + m\lambda_N$.

Горизонтальными полиномами степени не выше l будем называть функции, у которых все производные вдоль горизонтальных векторных полей X_i, $i = 1, ..., n_1$, порядка $l+1$ тождественно равны нулю.

Условие 1. Предположим, что для любых $1 < p < \infty$ и функции $f \in W_p^k(G)$ выполняется слабое неравенство Пуанкаре

$$\left\|X^\lambda (f - P_B f)\right\|_{L_p(B)} \le Cr^{k-|\lambda|_h} \left\| \sum_{i_1,...,i_k=1}^{n_1} X_{i_1}...X_{i_k} f \right\|_{L_p(\gamma_1 B)},$$

где B – некоторый шар радиуса r, γ_1 – константа, определяемая структурой группы, $|\lambda|_h \le k$, константа C зависит от r, ν, p и $P_B f$ – горизонтальный полином степени $k-1$.

В случае двухступенчатых групп Карно $(m = 2)$ слабое неравенство Пуанкаре доказано с помощью интегральных представлений.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнено условие 1, а $U \in J(\alpha, \beta)$ и $1 < p < \infty$. Тогда для всякого натурального k найдется проекционный оператор P_k, переводящий функции класса $W_p^k(U)$ в горизонтальные полиномы степени не выше $k-1$, такой, что справедливо неравенство

$$\left\|X^\lambda (f - P_k f)\right\|_{L_p(U)} \le C(diam U)^{k-|\lambda|_h} \left\| \sum_{i_1,...,i_k=1}^{n_1} X_{i_1}...X_{i_k} f \right\|_{L_p(U)},$$

где $|\lambda|_h \le k$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 06–01–00735), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ 8526.2006.1).

Литература

1. Garofalo N., Nhieu D.M. Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot–Caratheodory spaces and the existence of minimal surfaces // Commun. Pure Appl. Math. V. 49, №10. 1996. P. 1081–1144.
2. Hajlasz P., Koskela P. Sobolev meets Poincare // C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I 320, №10. 1995. P. 1211-1215.

О секвенциальном продолжении гомоморфизмов

А.Н. Саженков
АлтГУ, г. Барнаул

Пусть множество G является абелевой группой и пространством с секвенциальной сходимостью, удовлетворяющей аксиоматике Фреше. При этом операция сложения отдельно по каждой переменной и операция взятия противоположного элемента секвенциально непрерывны. F – секвенциально полная топологическая абелева группа. Алгебраический гомоморфизм h подгруппы A группы G в H непрерывный на A в топологии, порождённой секвенциальной сходимостью в G, будем называть непрерывным секвенциальным гомоморфизмом. Группа B порождена секвенциальным замыканием подгруппы A. C – замыкание подгруппы A в топологии, порождённой секвенциальной сходимостью в G.

Теорема 1. Пусть h секвенциально непрерывный гомоморфизм из A в H. Тогда существует единственный секвенциально непрерывный гомоморфизм из B в H, продолжающий h.

Теорема 2. Пусть h секвенциально непрерывный гомоморфизм из A в H. Тогда существует секвенциально непрерывный гомоморфизм из C в H, продолжающий h.

Гармонический тензор Вейля на обобщенных пространствах Уоллача

А.С. Сидоров, Е.Д. Родионов
БГПУ, г. Барнаул

Пусть M – однородное пространство с левоинвариантной римановой метрикой и тензором Вейля W_{ijkl}. В данной работе мы изучаем метрики на обобщенных пространствах Уоллача, для которых