параметрическое уравнение половины симметричной кривой имеет вид

$$x = 0.4916271487 \cdot \cos(t);$$

$$y=0.4916271487 \cdot \sin(t);$$

$$z=\int_{u=0}^{t}\left(\begin{array}{l}0.05841756227\cdot(\sin(2u)+2\cdot u-\pi)\,/\\ \left(\begin{array}{l}-0.05647745740\cdot u\cdot\sin(2u)+0.08871458264\cdot\sin(2u)+\\ +0.01411936435\cdot\cos^2(2u)-0.0141193644-0.05647745740\cdot u^2+\\ +0.1774291653\cdot u^2\end{array}\right)^{\frac{1}{2}}\end{array}\right)dt$$

где $0 \le t \le \pi$.

Другая часть кривой симметрична исходной относительно плоскости z (см. рис. 1).

Выпуклая оболочка данной кривой имеет вид (рис. 2).

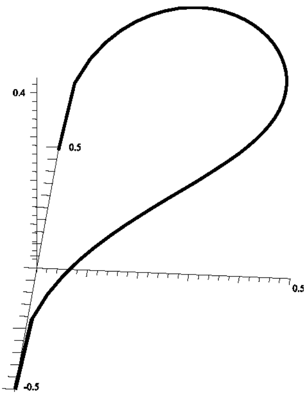

Рис. 1

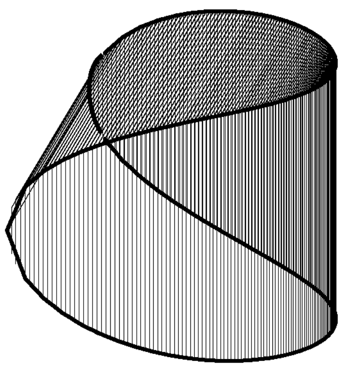

Рис. 2

Кривизна листа Мёбиуса

А.В. Назарова, М.А. Чешкова

АлтГУ, г. Барнаул

В евклидовом пространстве E3 рассмотрим линейчатую поверхность M, образованную прямыми, ортогонально секущими окружность. Тогда уравнение поверхности запишется в виде

$r(u,v) = e(v) + u\,l(v)$, $e(v) = (\cos(v), \sin(v), 0)$;

$l(v) = \cos(v/2)\,e(v) + \sin(v/2)k$, $k=(0,0,1)$.

Прямые v = 0 и v = 2π «склеиваются». Имеем лист Мёбиуса [1. с. 43] (рис. 1–3). Заметим, что при увеличении u он стремится к самопересечению.

-0.5< u <0.5

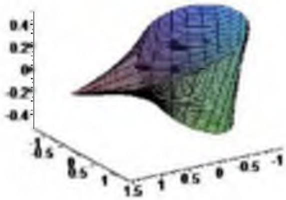

Рис. 1

-5< u <5

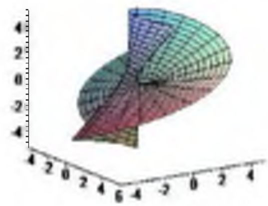

Рис. 3

-2< u <2

Рис. 2

Кривизна листа Мёбиуса

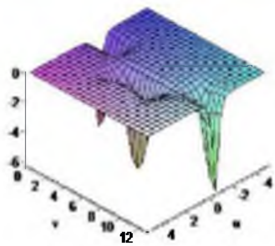

Рис. 4

Гауссова кривизна *K(u,v)* [0, с. 138] имеет вид (рис. 4)

$$K(u,v) = \frac{-\frac{1}{4}}{\left(\frac{u^2}{4} + \left(1 + u\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)^2\right)^2}.$$

Исследуем эту функцию на экстремум.

Заметим, что $K < 0$, т.е. точки листа Мёбиуса являются гиперболическими [2, с. 138]. Покажем, что она ограничена. Найдём точки экстремума из $\partial_u K = 0$, $\partial_v K = 0$. Имеем точки M₁=$(0,\pi)$, M₂=$(\frac{4}{5},0)$, M₂=$(\frac{4}{5},2\pi)$. Подсчитаем кривизну в этих точках K(M₁)=$-\frac{1}{4}$, K(M₂)=$-\frac{25}{4}$, K(M₃)= $-\frac{25}{4}$.

Теорема. Кривизна листа Мёбиуса находится в пределах $[-\frac{25}{4},0)$ и достигает наименьшего значения $-\frac{25}{4}$.

Литература

1. Торп Дж. Начальные главы дифференциальной геометрию. - М., 1982.
2. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М., 1974.

О конгруэнции сфер

Е.А. Петрова
АлтГУ, г. Барнаул

Двухпараметрическое семейство сфер называется *конгруэнцией сфер* [1, с. 459]. Геометрическое место центров сфер конгруэнции называется *поверхностью центров*. Конгруэнция сфер определена, если заданы поверхность центров M: $r = r(u^1,u^2)$ и скалярная функция $\rho = \rho(u^1,u^2)$, определяющая радиус соответствующей сферы.

Огибающая конгруэнции [2, с. 102] сфер состоит из двух поверхностей (рис. 1). Радиус-вектор точки огибающей можно записать в виде

$$R = r + \rho \cdot a,$$

где a – единичный вектор, направленный из центра сферы в соответствующую точку огибающей. Этот вектор является вектором нормали огибающей. В разложении на касательную и нормальную составляющие a принимает вид

$$a = U + \sigma \cdot n,$$

где $U=r_k \cdot p^k$ лежит в касательной плоскости.