Математические модели двухфазной фильтрации, не использующие закон Дарси; вопросы разрешимости.

А.А. Папин
АлтГУ, г. Барнаул

Классические математические модели движения двухфазной жидкости в пористых средах включают законы сохранения массы и энергии, а также эмпирический закон Дарси, связывающий вектор скорости и градиент давления [1]. В настоящее время все большее применение находят модели, не использующие закон Дарси.

Рассмотрим движение смеси двух взаимонерастворимых жидкостей в недеформируемой пористой среде. Уравнения баланса масс жидких фаз в отсутствие фазовых переходов имеют вид [2–4]

$$\frac{\partial\left(\alpha_i\rho_i^o\right)}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\alpha_i\rho_i^o\vec{v}_i\right)=0,\quad i=1,2,$$

где t – время, ρ_i^o – истинная плотность i-й фазы, $\vec{v}_i$ – истинная скорость ее движения, α_i – объемная концентрация, $div\,\vec{v}_i=\sum\limits_{k=1}^{3}\frac{\partial v_i^k}{\partial x_k}$, ($x_1$, x_2, x_3) – декартовы координаты.

Уравнения баланса импульса имеют следующий вид [2–4]

$$\alpha_i\rho_i^o\left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial t}+(\vec{v}_i\cdot\nabla)\vec{v}_i\right)=div\,\sigma_i+\sum_j\vec{P}_{ij}+\alpha_i\rho_i^o\vec{g}_i,\ i=1,2,$$

где σ_i – истинные фазовые напряжения, $\vec{P}_{ij}$ – интенсивность обмена импульсом между i-й и j-й фазами, $\vec{g}_i$ – вектор внешних сил, ∇ – оператор градиента. Для тензора напряжений и вектора $\vec{P}_{ij}$ используются зависимости [3]:

$$\sigma_i=\alpha_i\,(-p_i+\lambda_i\,\mathrm{div}\,\vec{v}_i\,)\,I+2\,\alpha_i\,\mu_i\,D_{ij},$$

$$\sum_j P_{ij}=p_i\,\nabla\,\alpha_i+\sum_j K_{ij}\,(\vec{v}_j-\vec{v}_i).$$

Здесь p_i – давление в i-й фазе, I - единичный тензор, λ_i и μ_i – соответственно коэффициенты сдвиговой и динамической вязкости ($0\le\mu_i$,

$0 \le 3\lambda_i + 2$), K_{ij} – коэффициент взаимодействия фаз, D_i – тензор скоростей деформации с компонентами $D_i^{kl} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i^k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_i^l}{\partial x_k})$, $(k, l) \in \{1, 2, 3\}$.

При выводе уравнения энергии предполагается, что насыщенная двухфазной жидкостью пористая среда является трехфазной системой, состоящей из пористой недеформируемой матрицы ($\vec{v}_3 = 0$), объемная концентрация которой равна $\alpha_3 = 1 - \varphi$ (φ – пористость) и двух взаимопроникающих жидкостей с объемными концентрациями $\alpha_1 = \varphi s$ и $\alpha_2 = \varphi(1-s)$, где s – фазовая насыщенность первой жидкостью порового пространства ($\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$). Ряд гипотез, основной из которых является предположение о равенстве фазовых температур в каждой точке среды, приводит к следующему уравнению энергии

$$\sum_{i=1}^{3} c_i \rho_i (\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v}_i \nabla \theta) = div(\chi \nabla \theta),$$

где θ – абсолютная температура, c_i – теплоемкость i-й фазы при постоянном объеме (i = 1, 2, 3), χ – коэффициент теплопроводности среды.

Система балансовых уравнений дополняется законом Лапласа $p_2 - p_1 = p_c$, в котором капиллярное давление p_c является заданной функцией.

В докладе излагаются результаты о разрешимости краевых задач для приведенной системы уравнений.

Литература

1. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М.: Мир, 1971.

2. Rajagopal K.L., Tao L. Mechanics of mixtures. Word Scientific Publishing, 1995.

3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. – М.: Наука, 1987.

4. Ведерников В.В., Николаевский В.Н. Уравнения механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // Изв. Ан СССР. Механика жидкости и газа. – 1978. №5. – С. 165–169.