где $\alpha_0, \alpha'_0, \alpha_k, \alpha'_k, \beta_k, \beta'_k \in K_0$, $\gamma_k, \gamma'_k \in R_0 / pR_0$, $\dot{a}_{ij}^k \in K_0$, $\dot{a}_{ij}^k + pR_0 = a_{ij}^k$.

Литература

1. Журавлев Е.В. О классификации конечных локальных колец характеристики p^2, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре// Известия АГУ. – 2008. № 1(57). С. 18–28.

2. Журавлев Е.В. Локальные кольца порядка p^6 с 4-нильпотентным радикалом Джекобсона // Сибирские электронные математические известия [Электронный ресурс]. – 2006. Т. 3. С. 15–59. – Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru.

3. Gorbas B., Williams G.D. Rings of order p^5. Part 2. Local rings // Journal of Algebra. 2000. V. 231.

4. Chikunji C.J. On a Class of Finite Rings // Communication in Algebra. 1999. V. 27(10).

О коммутативности ассоциативных колец

А. В. Кислицин
БГПУ, г. Барнаул

Будем рассматривать ассоциативные кольца.

В 1905 году Веддерберн доказал коммутативность любого конечного тела. С этого времени многие алгебраисты (Х. Белл, Н. Джекобсон, И. Капланский, К. Фейс, И. Херстейн и другие) начали доказывать «теоремы коммутативности», т.е. выявлять условия, при которых ассоциативные кольца являются коммутативными. Ведущие алгебраисты, доказывая «теоремы коммутативности», зачастую обобщали теоремы друг друга, но, тем не менее, остаются результаты, поддающиеся дальнейшим обобщениям.

Белл и Клейн в работе [1] рассмотрели, часто встречающееся при доказательстве коммутативности ассоциативных колец, тождество $[x^n, y] = nx^{n-1}[x, y]$. В частности, в работе [1] было доказано, что любое первичное кольцо R, в котором для любого $x \in R$ найдется целое $n = n(x) > 1$ такое, что для любого $y \in R$ выполняется $[x^n, y] = nx^{n-1}[x, y]$ будет коммутативным. На основе данного результата удалось сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть R – полупервичное кольцо с тождеством $[p(x), y] = p'(x)[x, y]$, где $p(t) \in t^2\boldsymbol{Z}[t]$, $p(1) = \pm 1$, старший коэффициент p равен ± 1, $p'(1) = n = \deg p \geq 2$. Тогда R коммутативно.

Томас Лаффи и Десмонд МакХэйл в работе [2] показали, что любое кольцо с тождеством $f(x) = 0$, где $f(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ будет коммутативным тогда и только тогда, когда либо $a_1 = \pm 1$, либо $a_1 = \pm 2$, $a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ – нечетное и a_2 – нечетное. Заменив тождество $f(x) = 0$ тождеством $f(g(x)) = 0$, где $g(t) \in t\,\boldsymbol{Z}[t]$ – некоторый многочлен, удалось получить следующее обобщение.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{R}$ = $var< f(g(x)) = 0 >$, где $f(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$, $g(t) = b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_m t^m$ – некоторые многочлены с целыми коэффициентами. $\mathfrak{R}$ – коммутативное многообразие колец в том и только том случае, когда выполнено одно из следующих условий:

1) $b_1 = \pm 1$, $a_1 = \pm 2$, a_2 – нечетное, $a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ – нечетное, $f(1)$ – нечетное;

2) $a_1 = \pm 1$, $b_1 = \pm 2$, b_2 – нечетное, $b_2 + b_3 + \ldots + b_m$ – нечетное, $g(1)$ – нечетное;

3) $a_1 = \pm 1$, $b_1 = \pm 1$.

В работе [4] Адил Якуб исследовал вопросы коммутативности слабо периодически–подобных колец. Среди прочих результатов автором было доказано, что слабо периодически–подобное кольцо R, в котором для любых ненильпотентных элементов x, y найдется слово $\omega(x, y)$ такое, что $\omega(x, y)[xy, yx]$ – потентный элемент, то множество N нильпотентных элементов R образует идеал в R и факторкольцо R/N коммутативно. Ослабив условия, наложенные автором на рассматриваемый класс колец, была доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть R – слабо периодически–подобное кольцо, в котором для всех $x, y \in R \setminus N$ элемент $f(x, y)[\phi(xy), \psi(yx)]$ – потентный, где $f(u, v) \in \boldsymbol{Z}<u,v>$, $f(1,1) = \pm 1$, $\phi(t), \psi(t) \in \boldsymbol{Z}[t]$, $\phi(1) = \pm 1, \psi(1) = \pm 1$, N – множество нильпотентных элементов R. Тогда $N \triangleleft R$ и R/N коммутативно.

Литература

1. Bell H., Klein A. Two commutativity problems for rings//Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 28. – 1993. 159–162.

2. Laffey T., MacHale D. Polynomials that force a ring to be commutative//Proceedings of the Royal Irish Akademy. – 1992. – № 2. – 277–280.

3. Mal'cev Y.N. The structure of associative algebras satisfying the polynomial identities and varieties of algebras. Barnaul, ASU, 1994.

4. Yaqub A. Weakly periodic–like rings and commutativity// Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 43 (3). – 2006. – 275–284.

О гипотезе Мохаррама Хана

А. В. Кислицин

БГПУ, г. Барнаул

На протяжении работы R обозначает ассоциативное кольцо с единицей, $Z(R)$ – его центр.

С тех пор, как Н. Джекобсон доказал, что любое кольцо, в котором каждый элемент равен самому себе в некоторой степени $n > 1$ коммутативно, этот результат подвергался множеству обобщений и вариаций. Например, И. Херстейн в 1951 году доказал, что если для каждого $x \in R$ существует целое число $n = n(x) > 1$ такое, что $x^n - x \in Z(R)$, то кольцо R коммутативно. МакХэйл расширил результат Херстейна (см. [1]), доказав, что если α – эпиморфизм $<R; +>$ такой, что $x^2 - \alpha(x) \in Z(R)$ для всех $x \in R$, то R коммутативно. Результат Макхэйла обобщен Томинагой, который показал, что если $n > 1$ – фиксированное целое и найдется сюръективный гомоморфизм α, действующий на $<R; +>$ такой, что $x^n - \alpha(x) \in Z(R)$ для всех $x \in R$, то R коммутативно (см. [1]).

Основываясь на приведенных выше результатах, Мохаррам Хан выдвинул гипотезу: пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, f и g – автоморфизмы R, $n > 1$ – фиксированное целое; если $f(x^{n+1}) \pm g(x^n) \in Z(R)$ для всех $x \in R$, то R коммутативно (см. [1]).

В работе [1] удалось получить положительный ответ на эту гипотезу при $n = 2, 3, 4$ и при ограничениях на f и g.

В настоящей работе гипотеза Хана исследована при $n = 5, 6$, результатом чего стали следующие теоремы: