Исследуем угол между прямолинейной образующей $v = const$ и второй асимптотической линией. Заметим, что в плоскости средней линии лежит прямолинейная асимптотическая $v = 0$.

Теорема 2. Асимптотические линии в точках образующей $r(u,0)=(1+u,0,0)$ пересекаются под прямым углом (рис).

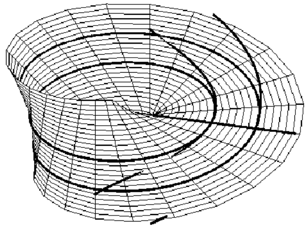


Рис.

Библиографический список

1. Торп, Дж. Начальные главы дифференциальной геометрии / Дж. Торп. – М., 1983.

2. Чешкова М.А. Дифференциальная геометрия / М.А. Чешкова. Барнаул, 2004. – С. 37.

О рибокуровой конгруэнции сфер

Е.А. Петрова, М.А. Чешкова

АлтГУ, г. Барнаул

В пространстве E^3 рассмотрим двухпараметрическое семейство сфер – *конгруэнцию сфер* [1, с. 459]. Конгруэнция сфер определена, если известны поверхность центров $M : r = r(u^1, u^2)$ и скалярная функция $\rho = \rho(u^1, u^2)$, определяющая радиус соответствующей сферы. *Огибающая* конгруэнции состоит из двух поверхностей – M^* и $\overline{M}^*$.

Введём обозначения: r^* – радиус-вектор точки на M^*, n^* – орт нормали M^*, $\overset{*}{g}_{ij}$ и $\overset{*}{b}_{ij}$ – первая и вторая квадратичная формы M^* соответственно, A^* – оператор Вейнгартена M^*, $V^* = V^k \overset{*}{r}_k$ – такой вектор из TM^*, что $N = n^* + V^*$ – вектор нормали к M.

Для того, чтобы M^* была огибающей некоторой конгруэнции сфер с функцией радиусов ρ, необходимо

$$\partial_i \rho = (\overset{*}{g}_{ik} + \rho \cdot \overset{*}{b}_{ik}) \cdot V^k, 1 + V^i V^j \overset{*}{g}_{ij} \geq 0. \qquad (1)$$

Уравнение второй огибающей имеет вид

$$\overline{r}^* = r^* - 2\rho \cdot \left(V^* + n^*\right) \Big/ \left(1 + \left\langle V^*,\ V^* \right\rangle\right),$$

где $\langle , \rangle$ – скалярное произведение в метрике $\overset{*}{g}_{ij}$.

Отображение $M^* \to \overline{M}^*$ называется *преобразованием Рибокура*, если линии кривизны M^* переходят в линии кривизны $\overline{M}^*$. Конгруэнция сфер в этом случае называется *конгруэнцией сфер Рибокура*. Конгруэнция сфер является рибокуровой, если форма $\omega_i = \left\langle N, n_i^* \right\rangle$ замкнута [2].

Введём обозначения: $\omega_i = \partial_i (\ln \lambda)$, $\psi = \rho \cdot \lambda$.

Теорема. [2] Каждому решению уравнения

$$\left(\overset{*}{\nabla}_i \partial_k \psi\right) \cdot A_j^{*k} = \left(\overset{*}{\nabla}_j \partial_k \psi\right) \cdot A_i^{*k} \qquad (2)$$

соответствует преобразование Рибокура. При этом

$$A_i^{*s} \cdot \partial_s \psi = -\partial_i \lambda. \qquad (3)$$

Здесь $\overset{*}{\nabla}_i \partial_k \psi = \partial_i \partial_k \psi - \Gamma_{ki}^m \partial_m \psi$ – ковариантная производная в метрике $\overset{*}{g}_{ij}$.

Рассмотрим случай, когда M^* – катеноид.

$$r^* = (\operatorname{ch} u \cdot \cos v, \operatorname{ch} u \cdot \sin v, u).$$

Решая уравнения (2)–(3), получим функции

$$\psi = g(v) \operatorname{ch} u + \int \operatorname{ch}^2 u \cdot f'(u) du, \quad \lambda = -\frac{g(v)}{\operatorname{ch} u} + f(u),$$

где $f(u)$ и $g(v)$ – произвольные функции.

Тогда

$$\rho(u, v) = \frac{g(v) \cdot \operatorname{ch} u + \int \operatorname{ch}^2 u \cdot f'(u) du}{-\dfrac{g(v)}{\operatorname{ch} u} + f(u)}.$$

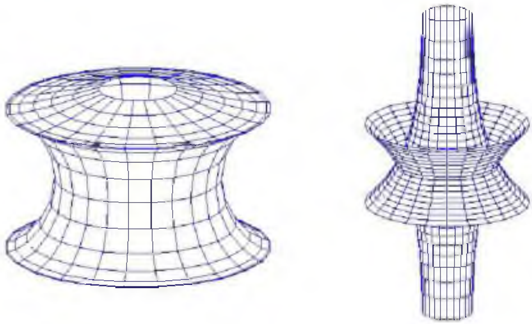
Уравнение поверхности центров примет вид

$$x = \left(\operatorname{ch} u + \frac{\rho}{\operatorname{ch} u}\right) \cdot \cos v,\ y = \left(\operatorname{ch} u + \frac{\rho}{\operatorname{ch} u}\right) \cdot \sin v,\ z = u - \rho \cdot \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u}.$$

Значения коэффициентов V^k можно найти из условия (1). Для катеноида получим

$$V^1 = \frac{\partial_1 \rho}{\mathrm{ch}^2 u - \rho}, \quad V^2 = \frac{\partial_2 \rho}{\mathrm{ch}^2 u + \rho}.$$

Примеры второй поверхности огибающей для различных ρ:



Библиографический список

1. Шуликовский, В.И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении / В.И. Шуликовский. 1963.

2. Чешкова, М.А. О ко нгруэнции Рибокура / М.А. Чешкова // Вестник БГПУ, 2008.

3. Чешкова, М.А. О конгруэнции гиперсфер / М.А. Чешкова // Математические труды. – 2006. – Т. 9, №1. – С. 169–175.

Регулярность решений квазилинейных уравнений субэллиптического типа на группах Карно[1]

Е.А. Плотникова

НГТУ, г. Новосибирск

Исследуется регулярность решений одного класса квазилинейных уравнений на группах Карно. Пусть $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ слабое решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} X_i A_i\left(x, u, X_1 u, \ldots, X_n u\right) = f\left(x, u, X_1 u, \ldots, X_n u\right),$$

[1] Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант НШ-5682.2008.1).