Библиографический список

1. Завьялова, Л.А. Об определении ω_0-прикасаемых множеств в n-мерном евклидовом пространстве / Л.А. Завьялова // Вестник БГПУ: Естественные и точные науки. – 2007. – №7. – С. 16–21.

2. Решетняк, Ю.Г. Об одном обобщении выпуклых поверхностей / Ю.Г. Решетняк // Математический сборник. – 1956. – Т. 40, №3. – С. 381–398.

Поиск полного решения биматричной игры

К.О. Кизбикенов

АлтГПА, г. Барнаул

Известно, что решение биматричной игры, то есть точки равновесия по Нэшу, в большинстве случаев, не единственно. Существуют программы [3], с помощью которых удается найти только одно решение биматричной игры. Естественно, возникает желание получить *все решения* биматричной игры. Работа посвящена решению этой проблемы.

Напомню некоторые необходимые сведения. Пусть $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ две матрицы размером $n \times m$, где n количество строк и m количество столбцов. Пусть $x=(x_1,...,x_n)$ и $y=(y_1,...,y_m)$ смешанные стратегии первого и второго игроков. Пусть $x^*=(x_1^*,...,x_n^*)$, $y^*=(y_1^*,...,y_m^*)$ оптимальные стратегии по Нэшу в биматричной игре. Обозначим через S_1 и S_2 спектры смешанных стратегий x^* и y^*.

Теорема. [2] Пара (x^*, y^*) являются оптимальными стратегиями по Нэшу тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям

$$\exists\, v_1, v_2 : \ \forall i \in S_1, \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^* = v_1, \quad \forall i \notin S_2, \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^* \le v_1, \tag{1}$$

$$\forall j \in S_2, \sum_{j=1}^{n} x_i^* b_{ij} = v_2, \ \forall j \notin S_2, \ \sum_{j=1}^{n} x_i^* b_{ij} \le v_2, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_i^* = 1, \ x_i^* \ge 0, \ \sum_{j=1}^{m} y_j^* = 1, \ y_j^* \ge 0. \tag{3}$$

Таким образом, если известны множества S_1, S_2, то для поиска равновесий Нэша можно просто решить системы линейных уравнений, входящих в (1), (2), и оставить те решения, которые удовлетворяют неравенствам из (1)–(3). Но проблема в том, что множества S_1, S_2 заранее не известны. В общем случае для их поиска необходим перебор всевозможных подмножеств множеств S_1, S_2.

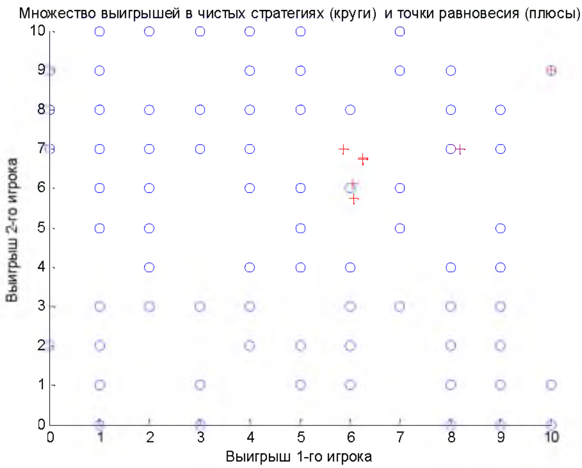
Оказывается, что для поиска равновесий Нэша достаточно перебирать квадратные подматрицы исходных матриц, то есть, когда количество элементов в S_1 и S_2 *одинаковое*. Это обстоятельство существенно облегчает полный перебор подмножеств S_1 и S_2.

Была написана программа в виде m-файла для MatLab, которая путем полного перебора находит все дискретные решения биматричной игры.

Пример. Биматричная игра задана двумя случайными матрицами порядка 10×10

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 & 9 & 4 & 8 & 2 & 5 & 9 \\ 8 & 1 & 10 & 9 & 6 & 0 & 4 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 4 & 9 & 2 & 8 & 7 & 5 \\ 5 & 9 & 8 & 3 & 5 & 9 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 8 & 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 9 & 1 & 1 & 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 & 2 & 3 & 9 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 10 & 4 & 6 & 1 & 9 & 10 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 6 & 8 & 8 \\ 7 & 4 & 8 & 1 & 2 & 1 & 1 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 7 & 7 & 4 & 3 & 8 & 8 & 4 & 1 \\ 9 & 10 & 0 & 0 & 4 & 7 & 3 & 3 & 8 & 1 \\ 1 & 10 & 8 & 3 & 8 & 7 & 5 & 8 & 6 & 5 \\ 9 & 5 & 9 & 0 & 8 & 2 & 7 & 2 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 7 & 1 & 2 & 1 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 1 & 1 & 8 & 8 & 5 & 5 & 10 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 7 & 4 & 10 & 5 & 2 & 8 & 6 \\ 5 & 9 & 4 & 3 & 6 & 3 & 1 & 3 & 8 & 5 \\ 10 & 8 & 7 & 10 & 7 & 6 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 10 & 10 & 2 & 0 & 8 & 2 & 3 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

За 0.4840 seconds программа нашла семь точек равновесия. На графике видно, что есть одно решение в чистых стратегиях, которое является и оптимальным по Парето, и шесть решений в смешанных стратегиях.



Скорость работы программы можно оценить по следующей таблице:

$$\begin{bmatrix} n & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ t & 0.02 & 0.021 & 0.03 & 0.06 & 0.16 & 0.51 & 2.02 & 7.7 & 30.8 & 126.7 \\ k & 1 & 3 & 3 & 3 & 12 & 1 & 29 & 14 & 20 & 18 \end{bmatrix}.$$

Здесь n размеры случайных квадратных матриц a и b, строка t – значение времени работы программы в секундах, а k количество найденных решений. Похоже, что скорость работы программы пропорционально, начиная с $n > 4$, функции 4^n.

Саму программу могу выслать по e-mail. Обращайтесь по адресу kko@uni-altai.ru

Библиографический список

1. Воробьев, Н.Н. Теория игр для экономистов – кибернетиков / Н.Н. Воробьев– М. : Наука, 1985. – 272 с.

2. Калугина, Т.Ф. Исследование операций / Т.Ф. Калугина, В.Ю. Киселев. – Иваново, 2003. – 394 с.

3. Васильев, И.Л. Параллельный глобальный поиск равновесных ситуаций в биматричных играх / И.Л. Васильев, К.Б. Климентова, А.В. Орлов // Вычислительные методы и программирование. – 2007. – Т. 8. – С. 223–243.

Изучение модели Пуанкаре геометрии Лобачевского с помощью математического пакета Maple

Е.И. Кузнецова, М.А. Чешкова
АлтГУ, г. Барнаул

Пусть пространство R_1^3 — трехмерное пространство со скалярным произведением $<x,y>^2 = -x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$.

В нем рассмотрим сферу мнимого радиуса $S_1^2 : -x^2 + y^2 + z^2 = -a^2$.

В евклидовом пространстве R^3 это уравнение двуполостного гиперболоида.

Построим стереографическую проекцию – отображение $f : S_1^2 \to R^2$ аналогично сфере в R^3. Образом S_1^2 для определенности возьмем при $x > 0$, будет внутренняя часть круга $y^2 + z^2 = a^2$. Обозначим через x,y,z координаты точки $P \in S_1^2$ и координатами u^1, u^2 точки $f(P)$ на круге, то связь между координатами