

Описание конечных ненильпотентных колец, имеющих планарные графы делителей нуля

А.С. Кузьмина
АлтГПА, г. Барнаул

Графом делителей нуля ассоциативного кольца R называется граф, вершинами которого являются все ненулевые (односторонние и двусторонние) делители нуля кольца, причем две различные вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда либо $xy=0$, либо $yx=0$.

Понятие графа делителей нуля было введено в работе [1]. Автор работы [1] ввел понятие графа делителей нуля для коммутативного кольца и вершинами такого графа считал все элементы кольца. В статье [2] это определение было изменено: в качестве вершин графа делителей нуля коммутативного кольца авторы рассматривали лишь ненулевые делители нуля. С этого момента теория графов делителей нуля стала достаточно интенсивно развиваться. Кроме того, понятие графа делителей нуля было распространено и на некоммутативный случай (см., например, [3]).

Одним из направлений исследования в этой области стало описание колец, графы делителей нуля которых удовлетворяют определенному условию. Так, в работах [4, 5] исследуются коммутативные конечные кольца с единицей, графы делителей нуля которых планарны. В частности, в [4] приведено полное описание конечных коммутативных разложимых колец с единицей, у которых графы делителей нуля планарны, а в [5] составлен полный список коммутативных конечных локальных колец с планарными графами делителей нуля. В [6] полностью описаны конечные нильпотентные (не обязательно коммутативные) кольца, имеющие планарные графы делителей нуля.

В данной работе мы приводим полное описание конечных ненильпотентных (не обязательно коммутативных) колец с планарными графами делителей нуля (список таких колец включает в себя 44 типа колец). Таким образом, результаты данной работы в объединении с результатами статьи [6] дают полный список конечных колец, чьи графы делителей нуля планарны.

Библиографический список

1. Beck, I. Coloring of Commutative Rings / I. Beck // Journal of Algebra. – 1988. – 116. – P. 208–226.

2. Anderson, D.F. The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring / D.F. Anderson, P.S. Livingston // Journal of Algebra. – 1999. – 217(2). – P. 434–447.
3. Akbari, S. On Zero-Divisor Graphs of Finite Rings / S. Akbari, A. Mohammadian // Journal of Algebra. – 2007. – 314. – P. 168–184.
4. Akbari, S. When Zero-Divisor Graph is Planar or a Complete r -partite Graph / S. Akbari, H.R. Maimani, S. Yassemi // Journal of Algebra. – 2003. – 270. – P. 169–180.
5. Belshoff, R. Planar Zero-Divisor Graphs / R. Belshoff, J. Chapman // Journal of Algebra. – 2007. – 316. – P. 471–480.
6. Kuz'mina, A.S. Nilpotent Finite Rings with Planar Zero-Divisor Graphs / A.S. Kuz'mina, Yu.N. Maltsev // Asian-European Journal of Mathematics. – 2008. – 1(4). – P. 565–574.

Нильпотентные конечные кольца с планарными графами делителей нуля

А.С. Кузьмина¹, А.Н. Мальцев²

¹АлтГПА, г. Барнаул, ²АлтГУ, г. Барнаул

В данной работе рассматриваются ассоциативные кольца.

Графом делителей нуля кольца R называется граф, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем две различные вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда либо $xy=0$, либо $yx=0$ (см. [1]).

Часто в работах, посвященных графам делителей нуля, изучается строение колец, графы делителей нуля которых обладают тем или иным свойством. Так, в статьях [2–5] исследуются коммутативные кольца с единицей, графы делителей нуля которых планарны.

В настоящей работе полностью описаны нильпотентные конечные кольца (необязательно коммутативные) с планарными графами делителей нуля.

Введем обозначения и определения, используемые в настоящей работе. Пусть для простого числа p

$$N_{0,p} = \langle a; a^2 = 0, pa = 0 \rangle;$$

$$N_{0,p^2} = \langle a; a^2 = 0, p^2a = 0 \rangle;$$