Библиографический список

1. Гамова, А.Н. Обобщенные вычисления с оракулами / А.Н. Гамова // Алгебра и логика. – 1988. – Т. 27, №2. –С. 131–147.

Различные варианты нестандартного форсинга

Ганов В.А., Дегтерева Р.В.

АлтГУ, АлтГТУ, г. Барнаул

Сначала метод форсинга использовался в качестве вспомогательного средства для решения конкретных задач, например, для доказательства независимости континуум-гипотезы, ([1]). Но на заключительном этапе от него избавлялись. Между тем сама идея форсинга представляется интереснее тех задач, для которых он был придуман.

Идея форсинга заключена в логически корректном разъединении между понятием истинная формула и понятием вынуждаемая формула. При классическом определении форсинга при специальных условиях истинные суждения совпадают с вынуждаемыми. Но определенный интерес представляет нестандартный форсинг, когда истинные суждения не совпадают с вынуждаемыми. Некоторые варианты определения нестандартного форсинга рассматриваются в этой работе.

Пусть Z – элементарная арифметика с константами для всех натуральных чисел, и $Z(N)$ – естественная модель системы Z на N, где $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Буквы n, m обозначают числовые константы и предметные переменные, значениями которых являются натуральные числа. Если φ – замкнутая формула языка Z, то запись $Z(N) \models \varphi$ обозначает истинность φ в модели $Z(N)$.

Пусть к сигнатуре системы Z добавлен символ P одноместного предиката. Далее, стандартным способом определяется система $Z(P)$, являющаяся консервативным расширением системы Z. *Вынуждающие условия* – это конечные множества формул вида $P(n)$ или $\neg P(n)$, причем каждое такое множество непротиворечиво. Для удобства изложение пусть пустое множество $\varnothing$ является вынуждающим условием. В произвольных случаях вынуждающие условия обозначаются буквой Q, возможно с некоторыми индексами.

Пусть Q – вынуждающее условие, φ – замкнутая формула языка $Z(P)$. Классическое определение отношения «Q *вынуждает* φ», (обозначение: $Q \Vdash \varphi$), осуществляется индукцией по логической глубине φ и почти полностью совпадает с определением отношения $Z(N) \models \varphi$, кроме случая когда $\varphi = \neg\varphi_1$. В этом случае считают, что $Q \Vdash \neg\varphi_1 \Leftrightarrow (\forall Q' \supseteq Q)\ \neg(Q' \Vdash \varphi_1)$.

В свою очередь, это соотношение подсказывает следующую идею нестандартного форсинга. Каждому условию Q ставится в соответствие множество вынуждающих условий $S(Q)$ такое, что выполняются условия:

$$Q' \in S(Q)\ \&\ Q'' \in S(Q') \Rightarrow Q'' \in S(Q), \tag{1}$$

$$Q' \in S(Q)\ \&\ Q \subseteq Q'' \subseteq Q' \Rightarrow Q'' \in S(Q), \tag{2}$$

$$\forall n \exists Q' \in S(Q)\ (P(n) \in Q' \vee \neg P(n) \in Q'). \tag{3}$$

Эти условия имеют технический характер. Например, из (1) следует, что $Q' \in S(Q) \Rightarrow S(Q') \subseteq S(Q)$. Из условия (2) следует, что $Q \in S(Q)$. Условие (3) необходимо для построения так называемых генерических предикатов.

Теперь, при определении отношения вынуждения в качестве допустимых расширений Q будут рассматриваться только элементы $S(Q)$. Например, отношение $Q \Vdash \neg\varphi_1$ можно определить так:

$$(\forall Q' \in S(Q))\neg(Q' \Vdash \varphi_1).$$

В простейших случаях определение множеств $S(Q)$ удобно начинать с $S(\varnothing)$. Например, пусть $S(\varnothing)$ состоит из одноэлементных множеств вида $\{P(n)\}$, где n пробегает все N. Кроме того, для любого $Q \in S(\varnothing)$ можно положить $S(Q) = S(\varnothing)$. В остальных случаях $S(Q)$ можно определять по-разному, лишь бы выполнялись условия (1-3). Тогда легко показывается, что верно соотношение: $\varnothing \Vdash \forall n P(n)$. Такое соотношение является примером того, что высказывание $\forall n P(n)$ является общепринятым высказыванием в рассматриваемой ситуации. С другой стороны, очевидно, что $\{\neg P(0)\} \Vdash \neg P(0)$. Тем самым, получено противоречие, состоящее в том, что не смотря на общепринятое высказывание $\forall n P(n)$, нашелся субъект, который считает утверждение $\neg P(0)$ истинным.

Теперь, предлагается подобным образом изменить определение дизъюнкции. Объявление в ресторане: «ЧАЙ ИЛИ КОФЕ БЕСПЛАТНО». Это высказывание является дизъюнкцией двух высказываний A и B, которую естественно нужно понимать в разделительном смысле. Но если некоторый высокопоставленный клиент закажет и чай, и кофе, то хозяин ресторана не возьмет с него плату ни за то, ни за другое. Тем самым, имеется некоторое множество $S(Q)$ клиентов, для которых это объявление считается в обычном неразделительном смысле. Такую ситуацию можно описать следующим соотношением:

$$Q \Vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Leftrightarrow (Q \Vdash \varphi_1 \wedge \neg Q \Vdash \varphi_2) \text{ или}$$
$$(Q \Vdash \varphi_2 \wedge \neg Q \Vdash \varphi_1),$$
$$\text{или } (\forall Q' \in S(Q))(Q' \Vdash \varphi_1 \wedge Q' \Vdash \varphi_2).$$

Подобная ситуация рассматривается для конъюнкции. Пусть «Джон купил автомобиль и Джон разбился» – истинное высказывание, оно является конъюнкцией двух высказываний A и B. По законам логики операция конъюнкции коммутативна, поэтому $A \wedge B$ и $B \wedge A$ одновременно истинные высказывания, но истинность $B \wedge A$ вызывает сомнение. Предлагается следующий вариант определения отношения $Q \Vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$:

$$Q \Vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Leftrightarrow Q \Vdash \varphi_1 \wedge (\forall Q' \in S(Q))(Q' \Vdash \varphi_2).$$

Тогда формально отношения $Q \Vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ и $Q \Vdash (\varphi_2 \wedge \varphi_1)$ не обязаны совпадать.

Высказывание: «Если студент учил предмет, то он сдаст по нему зачет», записывается в виде импликации $A \to B$, и для выяснения его истинности необходимы естественные уточнения. Например, можно добавить, что этот студент старательный, хорошо подготовленный и достаточно долго учил рассматриваемый предмет. Это наблюдение подсказывает в отношение $Q \Vdash (\varphi_1 \to \varphi_2)$ внести изменение вида $(\forall Q' \in S(Q))(Q' \Vdash \varphi_1)$ и $(Q' \Vdash \varphi_2)$.

Библиографический список

1. Коэн, П.ДЖ. Теория множеств и континуум-гипотеза / П.ДЖ. Коэн. – М. : Мир, 1969. – 347 с.

Об изоморфизме конечных локальных колец характеристики p², радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре

Е.В. Журавлев

АлтГУ, г. Барнаул

Рассматриваемый здесь результат является продолжением исследований, начатых в работах [1–4] и посвящен необходимым и достаточ-