О доминионах в одном многообразии метабелевых групп

А.И. Будкин
АлтГУ, г. Барнаул

Через M условимся обозначать многообразие групп, заданное тождеством $[x^2, y^2] = 1$, через гр(S) – группу, порождённую множеством S.

Теорема. Пусть G=гр(H,a) – произвольная группа из M, причем H – её полная подгруппа. Пусть $C = G\coprod_H G$ – свободное произведение в классе M группы G на G с объединенной подгруппой H. Тогда пересечение этих свободных сомножителей группы C совпадает с H.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (Мероприятие 1).

О декартовых произведениях GMV-алгебр и ℓ-групп

С.В. Вараксин
АлтГУ, Барнаул

Определение. *Алгебраическая система G с бинарными операциями* $+$, $\wedge$, $\vee$, *унарной операцией* $-$ *и константой 0 называется решеточно упорядоченной группой (ℓ-группой) [1], если относительно операций* $+$ *и* $-$ *G является группой с нулевым элементом 0, относительно операций* $\wedge$ *и* $\vee$ – *дистрибутивной решеткой, и операции эти операции связаны друг с другом соотношениями*

1. $u + (x \vee y) + v = (u + x + v) \vee (u + y + v)$;
2. $u + (x \wedge y) + v = (u + x + v) \wedge (u + y + v)$;

Определение. *Унитальной ℓ-группой* (G,u) *называется ℓ-группа G с «сильной единицей» – таким выделенным элементом* $u \in G$, *что выпуклая подгруппа* $o(u)=\{\, g \in G \mid \exists\, n \in Z:\ |g| < nu \,\} = G$ [1].

Определение. *Алгебраическая система A с бинарной операцией* $\oplus$, *двумя унарными операциями* $\neg$ *и* $\sim$ *и константами* 0 *и* 1 *называется псевдо-MV-алгеброй (GMV-алгеброй)* [2], *если выполняются следующие аксиомы:*

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;

2. $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$;
3. $x \oplus 1 = 1 \oplus x = 1$;
4. $1^{\neg} = 1^{\sim} = 0$;
5. $(x^{\neg})^{\sim} = x$;
6. $y \otimes x = (x^{\sim} \oplus y^{\sim})$;
7. $x \oplus (x^{\sim} \otimes y) = y \oplus (y^{\sim} \otimes x) = (x \otimes y^{\neg}) \oplus y = (y \otimes x^{\neg}) \oplus x$;
8. $x \otimes (x^{\neg} \oplus y) = (x \oplus y^{\sim}) \otimes y$,

где $y \otimes x = (x^{\neg} \oplus y^{\neg})$.

Пусть (G,u) − унитальная ℓ-группа, $A = \{ g \in G \mid 0 \le g \le u\}$. Определим на множестве A операции $\oplus$,   и $\sim$ по правилу:

$$x \oplus y = (x + y) \wedge u$$
$$x^{\neg} = u - x$$
$$x^{\sim} = -x + u$$
$$1 = u$$

Тогда алгебраическая система A будет GMV-алгеброй [3], которая обозначается $\Gamma(G,u)$.

Теорема 1 (*Двуреченский А.* [2]). *Пусть A − GMV-алгебра. Тогда найдется единственная (с точностью до изоморфизма) унитальная ℓ-группа (G,u) такая, что $A \cong \Gamma(G,u)$.*

Пусть A_i, $i \in I$ − GMV-алгебры, и $A = \overline{\Pi}_{i \in I} A_i$ − их декартово произведение. Тогда A также является GMV-алгеброй. Оказывается, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если $A = \overline{\Pi}_{i \in I} A_i$ – декартово произведение* GMV-*алгебр, и для всех $i \in I$ $A_i \cong \Gamma(G_i,u_i)$, то $A \cong \Gamma(G,u)$, где $(G,u) = \overline{\Pi}_{i \in I}(G_i,u_i)$ – декартово произведение унитальных ℓ-групп.*

Назовем GMV-алгебру o-аппроксимируемой, если она вложима в декартово произведение линейно упорядоченных GMV-алгебр.

Теорема 3. *Если A – o-аппроксимируемая* GMV-*алгебра, то $A \cong \Gamma(G,u)$, где (G,u) – o-аппроксимируемая унитальная ℓ-группа.*

Библиографический список

1. Копытов, В.М. Решеточно упорядоченные группы / В.М. Копытов. – М. : Наука, 1984.

2. Dvurechenskij, A. Pseudo MV-algebras are intervals of ℓ-groups / A. Dvurechenskij // J. Austral. Math. Soc. – 2002. – V. 72. – P. 427–445.

3. Georgescu, G. Pseudo MV-algebras / G. Georgescu // Multiple-Valued Logic. – 2001. – V. 6. – P. 95–135.