УДК 514.765

О вычислении спектра оператора кривизны конформно плоских метрических групп Ли

Д.Н. Оскорбин
АлтГУ, г. Барнаул

Исследование римановых многообразий с конформно плоской римановой метрикой, т.е. римановых многообразий, у которых тривиален тензор Вейля, является актуальной задачей римановой геометрии (см. [1]). В данной работе исследованы спектры операторов секционной кривизны, одномерной кривизны и кривизны Риччи групп Ли с конформно плоской левоинвариантной римановой метрикой. Более точные определения данных операторов приведены в работе [2]. Используя инвариантность римановой метрики, вопрос о вычислении спектра операторов кривизны конформно плоских метрических групп Ли сводится к соответствующему вопросу в алгебрах Ли групп Ли.

Для вычисления спектра оператора кривизны использован следующий факт (см. [2]): если $e_1, \ldots, e_n$ – ортобазис, в котором диагонализируемы матрицы операторов Риччи (r_{ij}) и одномерной кривизны (A_{ij}), то в базисе $e_i \wedge e_j$, при условии тривиальности тензора Вейля, диагонализируема матрица оператора кривизны, причем спектр оператора кривизны есть $\{K_{ij}\}$ $(i<j)$, где $K_{ij} = K_\sigma (e_i \wedge e_j)$. В вычислениях использована формула для выражения секционной кривизны через структурные константы алгебры (см. [3]). Доказана следующая

Теорема. Спектр оператора одномерной кривизны a_i и оператора Риччи r_i на n-мерной конформно плоской метрической группе Ли может состоять не более чем их двух различных значений.

Замечание. Имеют место два случая:

Случай 1. Все главные значения оператора одномерной кривизны равны между собой: $a_1=a_2=...=a_n=a$. Тогда равны между собой главные значения операторов Риччи и главные значения оператора секционной кривизны. Группа Ли в этом случае является эйнштейновым многообразием (см. [1]). Примером такой группы служит группа Ли с алгеброй Ли в виде полупрямой суммы: $R^{n-1} \oplus_A R$, с некоторым гомоморфизмом $A : R \to Der(R^{n-1})$.

Случай 2. Спектр оператора одномерной кривизны состоит из двух значений. Тогда спектр оператора Риччи также состоит из двух значений. Примером такой группы служит группа Ли с алгеброй Ли в виде:

$su(2)+(R^{n-4}\oplus_A R)$, где + обозначает прямую сумму алгебр Ли, $\oplus$ – полупрямую сумму алгебр Ли, с некоторым гомоморфизмом $A:R\to Der(R^{n-4})$.

Для вычисления спектра использован пакет аналитических вычислений Maple.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148).

Библиографический список

1. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О спектре оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 450(2):140.
2. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. – 1976. – V. 21.
3. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. – М.: Мир, 1990. – Т. 1, 2.

УДК 514.116

О формулах тригонометрии Лобачевского в терминах рациональной тригонометрии

С.В. Пастухова
АлтГУ, г. Барнаул

В [1] введены такие основные определения рациональной тригонометрии, как квадрация (quadrance) и апертура (spread) и выведены 5 законов рациональной тригонометрии: теорема Пифагора, закон апертуры, закон пересечений, тройные формулы для апертур и квадраций.

В [2] понятия рациональной тригонометрии расширены для тригонометрии Лобачевского.

В настоящей работе с помощью законов и методов рациональной тригонометрии выведены основные законы тригонометрии Лобачевского в терминах рациональной тригонометрии.

Теорема. Обозначим через a, b – катеты, c – гипотенузу, A, B – острые углы гиперболического треугольника ABC
Углы и стороны треугольника ABC связаны следующими основными формулами (в них k – постоянная Лобачевского) (формулы I-V).

В терминах рациональной тригонометрии они будут иметь вид: