УДК 514. 17

О линиях с фиксированным максимумом точек пересечения с гиперплоскостями

И.В. Поликанова

АлтГПА, г. Барнаул

Будем рассматривать линии в n-мерном аффинном пространстве A^n. Под линией понимаем одномерное многообразие, под дугой линии – образ числового отрезка $[a, b]$ при вложении его в линию. Условимся дугу с концами A и B обозначать AB.

Следуя Лейхтвейсу [1], выпуклую оболочку множества K будем обозначать $convK$, а множество экстремальных (называемых также крайними) точек выпуклого множества K будем обозначать $extK$. Напомним, крайние точки – это точки не являющиеся внутренними ни для какого отрезка с концами в множестве K.

Теорема. Пусть линия в A^n является гомеоморфным образом числового отрезка или окружности и не содержится ни в какой гиперплоскости. Если всякая гиперплоскость пересекает её не более чем в n точках, то линия лежит на границе своей выпуклой оболочки.

Доказательство. Пусть γ – линия в A^n, удовлетворяющая условиям леммы, и m – максимальное число точек пересечения линии с гиперплоскостями, $m \leq n$. Так как крайние точки выпуклого множества являются граничными для него ([1], замечание 4.1, стр. 31), то достаточно доказать, что все точки линии γ – крайние для её выпуклой оболочки. Допустим, что это не так: существуют точки $X \in \gamma$ и $Y, Z \in conv\,\gamma$ такие, что X – внутренняя точка прямолинейного отрезка $[YZ]$. Так как линия γ – компактное множество, то её выпуклая оболочка $conv\,\gamma$ также компактна ([1], теор. 2.6, стр. 20). По теореме Крейна-Мильмана ([1], теор. 4.2, стр. 32)

$$conv\,\gamma = conv(ext(conv\,\gamma)).$$

Поэтому найдутся симплексы S_Y и S_Z с вершинами в $ext(conv\,\gamma)$, содержащие точки Y и Z соответственно ([1], теор. 2.4, стр. 18). Тогда $X \in conv(S_Y \cup S_Z)$ ([1], пример 2.2, стр. 18). Пусть T – множество вершин обоих симплексов. Принимая во внимание, что симплекс является выпуклой оболочкой своих вершин, на основании следующих очевидных свойств выпуклых оболочек:

$$conv\,K_1 \subset conv\,K_2, \text{ если } K_1 \subset K_2,$$

$$conv\,K_1 \cup conv\,K_2 \subset conv(K_1 \cup K_2),$$

$$conv(conv\,K) = conv\,K,$$

заключаем:

$$conv(S_Y \cup S_Z) \subset conv(conv\,T) = conv\,T$$

и, следовательно, $X \in conv\,T$. Значит, существует симплекс S размерности $m \leq n$ с вершинами в множестве T, содержащий точку X. Учитывая, что $ext(conv\,\gamma) \subset \gamma$ ([1], теор. 4.1, стр. 31) и $T \subset ext(conv\,\gamma)$, заключаем, что $T \subset \gamma$. Так как по предположению $X \notin ext(conv\,\gamma)$, то $X \notin T$.

Рассмотрим случай $m \leq n-1$. Если $m < n-1$, то, поскольку линия не содержится ни в какой гиперплоскости, можно указать ещё $n-m-1$ точек линии γ отличных от X и таких, что вместе с вершинами симплекса S они образуют $(n-1)$-мерный симплекс $\tilde{S}$. Тогда содержащая $(n-1)$-мерный симплекс (S или $\tilde{S}$) гиперплоскость будет иметь $n+1$ точек пересечения с γ, именно: вершины симплекса и точку X. А это противоречит определению числа m. Следовательно $m = n$.

Пусть $S = conv\{A_1, A_2, ..., A_{n+1}\}$ – n-мерный симплекс, содержащий точку X в качестве внутренней, $A_i \in \gamma$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Для любых трёх точек линии одна из них всегда является внутренней точкой дуги с концами в двух других точках. Пусть точка X не принадлежит дуге A_1A_2, т. е. принадлежит дуге A_2A_{n+1}. Гиперплоскость σ, проходящая через n точек $A_3, \ldots, A_{n+1}, X$ общего положения, разделяет точки A_1 и A_2. Поэтому дуга A_1A_2 пересекает гиперплоскость σ. Точка пересечения её с γ должна совпадать с одной из точек набора $A_3, \ldots, A_{n+1}, X$, так как иначе гиперплоскость σ пересекала бы линию γ в $n+1$ точках, что противоречило бы определению γ. Получили, что линия γ имеет точку самопересечения, что противоречит определению линии как одномерного многообразия. Если точка X лежит на дуге A_1A_2, то после перенумерации вершин симплекса в обратном порядке вернёмся к рассмотренной ситуации. Значит, линия γ лежит на границе своей выпуклой оболочки. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема не допускает обобщение в виде: если всякая гиперплоскость пересекает связный компакт не более чем по n связным компонентам, то он является подмножеством своей выпуклой оболочки. Например, плоская фигура, состоящая из трёх прямолинейных отрезков, имеющих общий конец и расположенных под углом $120°$ друг к другу, является связным компактом. Всякая прямая пересекает его или по отрезку или не более чем в двух точках. Однако он не лежит на границе своей выпуклой оболочки.

Библиографический список

1. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. – М. : Наука, 1985. – 336 с.