В настоящее время она широко используется в многочисленных инженерных центрах, а также в зарубежных и нескольких российских ведущих университетах для преподавания на продвинутых курсах и проведения исследований.

УДК 532.5

Численное исследование влияния тепловых режимов на динамику и процессы теплопереноса в сферическом слое со свободными границами

А.В. Закурдаева, Е.В. Резанова
АлтГУ, г. Барнаул

Изучение процессов формирования сферических микробаллонов [1-4] связано с исследованием различных температурных режимов на свободных границах области. В данной работе исследуется сферический слой вязкой несжимаемой жидкости в условиях невесомости, содержащий внутри себя газовый пузырек [1-3]. Растворенный в жидкости газ представляет собой пассивную добавку. Внутри пузырька давление, плотность и абсолютную температуру можно считать функциями только времени, связанными уравнением Менделеева-Клапейрона.

Пусть область $R_1(t) < r < R_2(t)$ задает сферически симметричный слой, где $r = R_1(t)$ и $r = R_2(t)$ – его внутренняя и внешняя свободные границы. Задача сводится к определению положения свободных границ $R_1(t)$ и $R_2(t)$, скорости $\upsilon(t,r)$ и распределения температуры в жидкости $T(t,r)$. В качестве математической модели рассматриваемой задачи используется уравнение теплопереноса (1) и следствие системы уравнений Навье-Стокса (2) в области $R_1(t) < r < R_2(t)$. Уравнения записаны в безразмерном виде [2, 4]:

$$T_t + \upsilon \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{Pe} r^{-2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \chi(T) \frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} V^2 (R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2) R_1^{-3} R_2^{-3} + \\ + \mathrm{Re}^{-1} \cdot \left[P_g' - P_{vn}' - 2\overline{Si}\sigma(T)(R_1 + R_2) R_1^{-1} R_2^{-1}\right] R_1 R_2 (R_2 - R_1)^{-1} - \\ - 4\,\mathrm{Re}^{-1} \nu(T) V (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) R_1^{-2} R_2^{-2}, t > 0; V(0) = V_0,\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь введены обозначения: υ – радиальная скорость жидкости, $V = r^2\upsilon$ – скорость изменения объема оболочки, ν и σ – коэффициенты кинематической вязкости и поверхностного натяжения, χ, κ – коэффициенты температуро- и теплопроводности. Безразмерные комплексы и параметры задачи имеют следующий вид: $Pe = (\upsilon_* r_*) / \chi_*$ – число Пекле, $\mathrm{Re} = (\upsilon_* r_*) / \nu_*$ – число Рейнольдса, $\overline{Si} = Si \cdot S$, $Si = \sigma_* / r_* P_*$, $S = P_* r_* / \rho_* \upsilon_* \nu_*$. Звездочкой обозначены характерные значения физических величин, а ρ_* – характерное значение плотности жидкости. $P'_g = P_g \cdot S$, $P'_{vn} = P_{vn} \cdot S$, где P_g и P_{vn} – давление в газе и внешнее. При этом, характерные размер, время и скорость процесса связаны между собой соотношением: $r_* = \upsilon_* t_*$.

На границах сферического слоя выполняются кинематические и динамические условия. Также на внутренней границе определены условия баланса энергии и непрерывности температуры при переходе через поверхность, а на внешней – условие теплообмена с внешней средой, которое может быть задано в виде условий первого, второго или третьего рода (см. также [5] формулировку условий на границе раздела, допускающей массоперенос).

Скорость изменения объема сферической оболочки V и свободная граница R_1 определяются в результате решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение осуществляется методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности [6]. Положение внешней границы жидкого слоя R_2 вычисляется из закона сохранения объема оболочки: $R_2^3(t) - R_1^3(t) = R_{20}^3 - R_{10}^3$.

Полученная задача для определения распределения тепла в оболочке сводится к следующей задаче на плоскости лагранжевых координат путем перехода к новой безразмерной пространственной переменной $x = \left(r^3 - R_1^3(t)\right) \cdot \left(R_{20}^3 - R_{10}^3\right)^{-1}$ ($x \in [0,1]$). Таким образом, осуществляется переход на каждом шаге по времени в фиксированную область. В новых координатах уравнение теплопереноса выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\overline{\chi}(t,x)\frac{\partial T}{\partial x}\right], \tag{3}$$

где $\overline{\chi}(t,x) = \frac{9}{Pe}\left(R_{20}^3 - R_{10}^3\right)^{-2} \cdot \left[R_{20}^3 - R_{10}^3 + R_1^3(t)\right]^{4/3} \chi\left(T(t)\right)$.

Для уравнения (3) строится неявная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространственной переменной [2]:

$$\frac{T_i^{s+1}-T_i^s}{\tau}=\frac{1}{\hbar_i}\left[\overline{\overline{\chi}}_{i+1}\frac{T_{i+1}^{s+1}-T_i^{s+1}}{h_{i+1}}-\overline{\overline{\chi}}_i\frac{T_i^{s+1}-T_{i-1}^{s+1}}{h_i}\right], \qquad (4)$$

где введены обозначения

$$h_i=x_i-x_{i-1}, \hbar_i=0{,}5\left(h_i+h_{i+1}\right),$$

$$\overline{\overline{\chi}}_i=0{,}5\left[\overline{\chi}(t^{s+1},x_{i-1})+\overline{\chi}(t^{s+1},x_i)\right], \quad t^{s+1}=t^s+\tau.$$

Для решения схемы (4) применяется метод прогонки с параметром, в роли которого выступает неизвестное значение температуры на внутренней границе слоя. Проведено тестирование с помощью формального точного и численного решений уравнения переноса тепла (3). Тестирование численного алгоритма проводилось также на последовательности сеток.

На основе предложенного алгоритма проведены численные эксперименты по формированию стеклянной оболочки, содержащей углекислый газ. Численно исследовано влияние различных температурных режимов на динамику жидкого слоя и распределение тепла в нем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00163).

Библиографический список

1. Гончарова О.Н. Математическая модель формирования сферических оболочек в условиях кратковременной невесомости // Динамика сплошной среды / СО АН СССР, Институт Гидродинамики – Новосибирск, 1987. – № 8. – С. 66-79.

2. Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Диффузионное приближение в задаче формирования сферических микробаллонов в условиях кратковременной невесомости // Моделирование в механике / СО АН СССР, Институт Гидродинамики. – Новосибирск, 1990. – № 5. – С. 83–95.

3. Гончарова О.Н. Глобальная разрешимость задачи о формировании сферических микробаллонов // Динамика сплошной среды / СО АН СССР, Институт Гидродинамики. – Новосибирск, 1993. – № 106. – С. 36-48.

4. Резанова Е.В. Численное исследование динамики сферической газосодержащей оболочки // Известия АлтГУ. – 2013 – С. 42–47.

5. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // Известия АлтГУ. – 2012. – № 73 (1/2). – С. 12–18.

6. Калиткин Н.Н. Численные методы // М.: Наука, 1978. – 512 с.