3. Cloopeau T., Ferrin J.L., Gilbert R.P., Mikeli\'{c} A. Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part II // Math. Comp. Modelling. – 2001. – Vol. 33. – P. 821–841.

4. Bear J. Dynamics of fluids in porous media. – New York: Dover Publications, 1988. – 784 p.

**УДК 517.95 + 532.582**

## Численное исследование краевой задачи о колебаниях тонкой ледовой пластины

***К.А. Шишмарев***

*АлтГУ, г. Барнаул*

Рассматривается движение жидкости в трехмерном канале, покрытом льдом. Канал имеет ширину $2L, (-L \le y \le L)$ и высоту $H, (-H \le z \le 0)$, $(-\infty < x < \infty)$ $(x, y, z$ – декартовы координаты). Лед рассматривается как тонкая вязкоупругая пластина, закрепленная на стенках канала $(y = -L, L)$. Нагрузка движется по пластине в положительном направлении оси $x$. В результате нагрузки пластина отклоняется от исходного состояния $(z = 0)$ на величину $w(x, y, t)$.

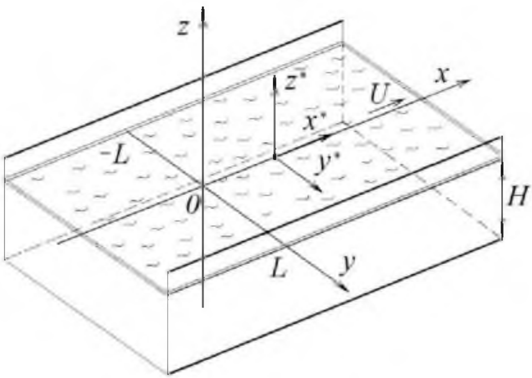


Рис. 1. Схема прямоугольного канала с ледовым покровом

Прогиб ледовой пластины $w(x, y, t)$ описывается уравнением вязко-упругих колебаний ледовой пластины [1] в следующем виде

$$Mw_{tt} + D\left(1 + \tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^4 w = P(x, y, t) + p(x, y, 0, t)$$
$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0), \tag{3}$$

здесь $D = Eh_i^3/[12(1 - \nu^2)]$ – изгибная жесткость; $E$ – модуль Юнга; $h_i$ – толщина ледовой пластины; $\nu$ – коэффициент Пуассона для льда; $\tau = \eta/E$ – время релаксации; $\eta$ – вязкость; $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}$, $M = \rho_i h_i$ – масса льда на единицу площади; $\rho_i$ – плотность льда; $p(x, y, 0, t)$ – давление на поверхности жидкости; $P(x, y, t)$ – внешнее давление, создаваемое движением нагрузки; $t$ – время.

Внешняя нагрузка задается гладкой локализованной функцией $P(x, y, t)$. Нагрузка движется прямолинейно по центральной линии канала и описывается следующим образом

$$P(x, y, t) = -P_0 P_1\left(\frac{x - Ut}{L}\right) P_2\left(\frac{y}{L}\right)$$
$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L), \tag{4}$$

здесь $U$ – скорость движения нагрузки.

Для определения гидродинамического давления на границе жидкость-лед используется линеаризованное уравнение Бернулли

$$p(x, y, 0, t) = -\rho\varphi_t - \rho g w$$
$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L), \tag{5}$$

где $\rho$ – плотность воды; $\varphi(x, y, z, t)$ – потенциал скорости течения; $g$ – ускорение свободного падения.

Потенциал течения $\varphi(x, y, z, t)$ в области течения в каждый момент времени удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi(x, y, z, t) = 0$$
$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L, -H < z < 0). \tag{6}$$

Граничные условия для $\varphi(x, y, z, t)$ определяются в соответствии с кинематическим условием на границе раздела между ледовой пластиной и жидкостью, а также условиями непроницаемости на дне и стенках канала и имеют вид

$$\varphi_z = w_t \quad (z = 0), \tag{7}$$

$$\varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \tag{8}$$

$$\varphi_z = 0 \quad (z = -H). \tag{9}$$

Полагается, что лед приморожен к стенкам канала, т.е. для прогиба $w(x, y, t)$ выполнены граничные условия

$$w = 0, \quad w_y = 0 \qquad (y = \pm L). \tag{10}$$

Условия затухания колебаний вдали от движущейся нагрузки для функций $\varphi(x, y, z, t)$ и $w(x, y, t)$ имеют вид

$$\varphi(x, y, z, t),\ w(x, y, t) \to 0 \qquad (|x| \to \infty). \qquad (11)$$

Система уравнений (1)-(9) приводится к безразмерному виду. Затем, с помощью преобразования Фурье вдоль канала рассматриваемая задача сводится к задаче относительно профиля волны поперек канала, которая решается методом нормальных мод для каждого значения параметра преобразования с заданным интервалом между значениями параметра. Определяются прогиб и напряжения в пластине.

Задача о прогибе упругой пластины под действием бегущей волны была исследована в [2, 3].

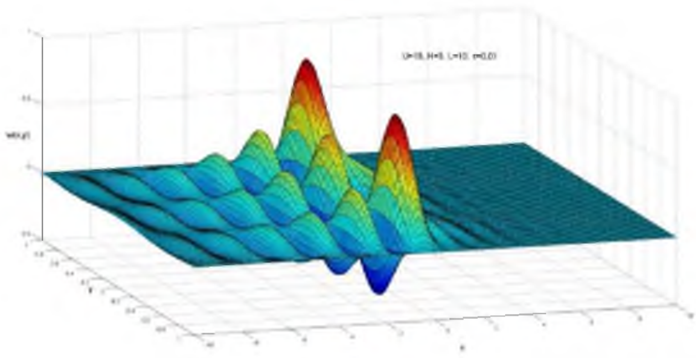

Рис. 2. Пример тестовых расчетов прогиба $w(x, y, t)$ ледового покрова в безразмерных координатах

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ «Взаимодействие ледового покрова с сооружениями при наличии неизвестных областей контакта», № 13-08-01097, и государственного задания Министерства №2014/2.

**Библиографический список**

1. Жесткая В.Д. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову // ПМТФ. – 1999. – Т. 40, № 4. – С. 243–248.

2. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2012. – Вып. 1/2 (73). – С. 55–59.

3. Коробкин А.А., Хабахпашева Т.И., Папин А.А. Математические модели снежно-ледового покрова. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013. – 116 с.