Секция 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ, ЭКОНОМИЧЕСКИХ И ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 519.83

Нахождение множества оптимальных по Парето решений в игре двух лиц с неполной информацией

Г.И. Алгазин, Е.В. Матюнин
АлтГУ, г. Барнаул

В работе рассматривается игра двух лиц при условии неполной информированности участников, решение которой определяется в рамках нахождения стратегий, оптимальных по Парето.

Зададим игру двух лиц в нормальной форме в виде:

$$G = \langle N, x, k, w, g \rangle,$$

где $N = \{1, 2\}$ – множество игроков;

$k = (k_1, ..., k_n)$ – вектор контролируемых параметров, где $k \in K \subset R$;

$w = (w_1, ..., w_m)$ – вектор неконтролируемых параметров. Будем считать, что $w_1, ..., w_m$ – непрерывные случайные величины, распределенные в соответствии со своими плотностями распределения $f(w_1), ..., f(w_m)$ на интервалах $[a_i, b_i]$ соответственно, где $a_i < b_i$, $(i = 1, ..., n)$. Пусть $\langle \Omega, \Sigma, \mathrm{P} \rangle$ – вероятностное пространство, тогда $w : \Omega \to R$ – измеримая относительно Σ борелевской σ – алгебры функция на R;

$x = (x_1, x_2)$ – вектор стратегий игроков (в некоторых случаях возможно рассматривать данный вектор как часть множества контролируемых параметров).

Критерии эффективности игроков зададим в виде:

$$\begin{aligned} f_1 &= F_1(x_1, k_1, ..., k_n, w_1, ..., w_m) \to \max_{x_1}, \\ f_2 &= F_2(x_2, k_1, ..., k_n, w_1, ..., w_m) \to \max_{x_2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Определим множество оптимальных по Парето решений для задачи (1). В случае рассмотрения моделей с неполной информацией, где неконтролируемые параметры являются непрерывными случайными величинами, стратегии игроков примут вид элементов функциональных пространств [1]. При этом множество Парето-оптимальных решений $(x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot))$ задается следующим образом: $\left(x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot)\right) : \forall\, x_1(\cdot), x_2(\cdot)$,

$F_1(x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot), k, w) \le F_1(x_1(\cdot), x_2(\cdot), k, w)$, $F_2(x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot), k, w) \le F_2(x_1(\cdot), x_2(\cdot), k, w)$,

где $x_1(\cdot) \in X_1 \subset C^1_{[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]}$, $x_2(\cdot) \in X_2 \subset C^1_{[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]}$ [2].

Зададим информационную обстановку рассматриваемой игры. Нахождение Парето-оптимальных решений не предполагает введения очередности хода игроков и, соответственно, информированности о выборе стратегий игроками. В данном случае участники игры имеют информацию о том, что принципом поведения является определение Парето-оптимальных решений. Игроки также владеют некоторой информацией о неконтролируемых параметрах, входящих в целевые функции [3].

Определим переговорное множество для игры двух лиц с неполной информацией в виде:

$$P = \left\{ f_1(x_1(\cdot), x_2(\cdot)),\ f_2(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) : f_1 \le L_1, f_2 \le L_2 \right\},$$

где $\overline{L}_1$ – гарантированный выигрыш первого игрока, $\overline{L}_2$ – гарантированный выигрыш второго игрока.

Определим нижнее значение переговорного множества как [4]:

$$\overline{L}_1 = \min_{x_1(\cdot)\in X_1} \max_{\underline{x}_2 \le x_2 \le \overline{x}_2} F_1(x_1(\cdot), x_2, k, w);$$

$$\overline{L}_2 = \min_{x_2(\cdot)\in X_2} \max_{\underline{x}_1 \le x_1 \le \overline{x}_1} F_2(x_1, x_2(\cdot), k, w).$$

Таким образом, для упрощения процедуры вычисления гарантированного результата будем считать, что внутренние максимумы $\overline{L}_1$, $\overline{L}_2$ подсчитываются в предположении полной информированности соответствующих игроков. Тогда имеет место следующее выражение:

$$\overline{L}_1 \ge L_1;$$

$$\overline{L}_2 \ge L_2,$$

где $L_1 = \min\limits_{\underline{x}_1 \le x_1 \le \overline{x}_1} \max\limits_{\underline{x}_2 \le x_2 \le \overline{x}_2} F_1(x_1, x_2, k, w)$, $L_2 = \min\limits_{\underline{x}_2 \le x_2 \le \overline{x}_2} \max\limits_{\underline{x}_1 \le x_1 \le \overline{x}_1} F_2(x_1, x_2, k, w)$ – гарантированные выигрыши игроков в условиях полной информированности.

Запишем гарантированный результат первого игрока в следующей форме [5]:

$$L_1 = M_w\left[F_1(x_1(\cdot), x_2, k, w)\right].$$

Значение стратегии $x_1^*(\cdot)$ определяется решением следующей вариационной задачи:

$$\int_{w_1}\ldots\int_{w_n} F_1(x_1(\cdot), x_2, k, w) d\Phi_1(w_1)\ldots d\Phi_n(w_n) \to \min_{x_2(\cdot)\in X_2}, \qquad (2)$$

где $\Phi_1(w_1),\ldots,\Phi_n(w_n)$ – функции распределения непрерывных случайных величин $w_1,\ldots,w_n$.

Необходимые условия оптимальности для задачи (2) записываются для одномерного случая в виде уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(F_1(x_1(\cdot), x_2, k, w)\right) - \frac{d}{dw}\frac{\partial}{\partial x_1'}\left(F_1(x_1(\cdot), x_2, k, w)\right) = 0\cdot$$

Для многомерной задачи вариационного исчисления в виде уравнения Эйлера-Остроградского, которое в общем случае записывается следующим образом:

$$F_{x_1(w)} + \frac{\partial}{\partial w_1} F_{x_1(w)_{w_1}} + \ldots + \frac{\partial}{\partial w_n} F_{x_1(w)_{w_n}} = 0.$$

Гарантированный результат второго игрока определяется как:

$$L_2 = M_w\left[F_2(x_1, x_2(\cdot), k, w)\right].$$

Нижнее значение для f_1 определим как $f_2^L = \int_W Z_1(k, w, L_1) d\Phi(w)$, верхнее значение для f_2 определим как $f_1^H = \int_W Z_2(k, w, f_2^L) d\Phi(w)$, где Z_1 и Z_2 – некоторые функция связи для f_1 и f_2. Внутренние значения переговорного множества задаются в виде: $f_1^I = \int_W Z_2(k, w, f_2^I) d\Phi(w)$.

Таким образом, определив нижнее, верхнее и внутренние значения переговорного множества, мы получили множество Парето-оптимальных решений мощности континуум. Однозначной Парето-оптимальной стратегии при этом не существует. Чтобы получить согласованное решение, выбирается уровень уступки $\gamma \in [0,1]$, с помощью которого осуществляется дележ совместного выигрыша [6]. При этом устойчивость решения обеспечивается либо механизмом обязующих соглашений, либо механизмом сильных штрафов.

Библиографический список

1. Жариков А.В. Нахождение равновесия Нэша в игре двух лиц для вариантов информационной структуры игроков // Обозрение прикладной и промышленной математики. – М., 2008. – Т. 15, вып. 3. – С. 470.

2. Matyunin E.V., Zharikov A.V. Decision Support problems under conditions of information asymmetry .Youth Academic Conference // Cur-

rent issues in modern economics: a fresh look and new solutions November 26-27, 2012. Publishers Tomsk University, 2013. – P. 161–166.

3. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

4. Матюнин Е.В., Жариков А.В. Математические модели принятия решений при асимметрии информированности // Анализ, геометрия и топология : труды всероссийской молодежной школы-семинара. – Барнаул, 2013. – С. 84–90.

5. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования: монография. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2005. – 250 с.

6. Мамченко О.П., Оскорбин Н.М. Моделирование иерархических систем. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2007. – 317 с.

УДК 004.021; 51.37

Численное решение задач теплового режима почв

А.В. Боярская, А.В. Кистанова

АлтГУ, г. Барнаул

Рассматриваются алгоритм и численный метод решения двумерной задачи теплового режима почв с границей раздела между двумя участками с различными теплофизическими параметрами. На границе раздела почвенных компартментов задаются условия непрерывности температур и тепловых потоков. Для численного решения задачи применяется численный метод с использованием продольно-поперечной конечно-разностной схемы (метод переменных направлений).

Разработка математических моделей, корректно учитывающих процессы теплопереноса в почве, является сложной и актуальной задачей. Соседствующие почвенные массивы (выделенные единицы управления в рамках одного поля) характеризуются различными теплофизическими величинами (параметрами), которые, в свою очередь, зависят от соотношения твердой, жидкой и газообразной составляющих, текстурных и структурных особенностей грунтов, состояния влаги и температуры.

В подавляющем большинстве современные модели, описывающие продукционный процесс сельскохозяйственных растений, рассматривают однородный фиктивный посев, а стратификация его характеристик производится в единственном вертикальном направлении. В подобных моделях расчет производится отдельно для каждой опорной