

rent issues in modern economics: a fresh look and new solutions November 26-27, 2012. Publishers Tomsk University, 2013. – P. 161–166.

3. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

4. Матюнин Е.В., Жариков А.В. Математические модели принятия решений при асимметрии информированности // Анализ, геометрия и топология : труды всероссийской молодежной школы-семинара. – Барнаул, 2013. – С. 84–90.

5. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования: монография. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2005. – 250 с.

6. Мамченко О.П., Оскорбин Н.М. Моделирование иерархических систем. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2007. – 317 с.

УДК 004.021; 51.37

Численное решение задач теплового режима почв

А.В. Боярская, А.В. Кистанова

АлтГУ, г. Барнаул

Рассматриваются алгоритм и численный метод решения двумерной задачи теплового режима почв с границей раздела между двумя участками с различными теплофизическими параметрами. На границе раздела почвенных компартментов задаются условия непрерывности температур и тепловых потоков. Для численного решения задачи применяется численный метод с использованием продольно-поперечной конечно-разностной схемы (метод переменных направлений).

Разработка математических моделей, корректно учитывающих процессы теплопереноса в почве, является сложной и актуальной задачей. Соседствующие почвенные массивы (выделенные единицы управления в рамках одного поля) характеризуются различными теплофизическими величинами (параметрами), которые, в свою очередь, зависят от соотношения твердой, жидкой и газообразной составляющих, текстурных и структурных особенностей грунтов, состояния влаги и температуры.

В подавляющем большинстве современные модели, описывающие производственный процесс сельскохозяйственных растений, рассматривают однородный фиктивный посев, а стратификация его характеристик производится в единственном вертикальном направлении. В подобных моделях расчет производится отдельно для каждой опорной

точки поля с параметрами, характерными только для данного типа почвы. Все точки считаются независимыми друг от друга, и предполагается, что все окружение данной точки обладает теми же свойствами и, соответственно, никаких горизонтальных перетоков вещества и энергии не происходит [2, 4].

Для целей точного земледелия горизонтальная неоднородность поля является важнейшим фактором, влияющим на выбор агротехники и определяющим результат хозяйствования.

Рассмотрим двумерную модель теплового режима почвы.

Пусть неоднородный почвенный компартимент Ω состоит из двух участков (рисунок 1): $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где

$$\Omega_1 = \{-x_1 \leq x \leq 0; -H \leq y \leq 0\}, \quad \Omega_2 = \{0 \leq x \leq x_2; -H \leq y \leq 0\},$$

значительно отличающихся по влиянию характеристик поля на продукционный процесс посева и на движение почвенных растворов (в действительности свойства почвы меняются от точки к точке непрерывно). Границы участков Ω_1 и Ω_2 полагаются известными и прямыми.

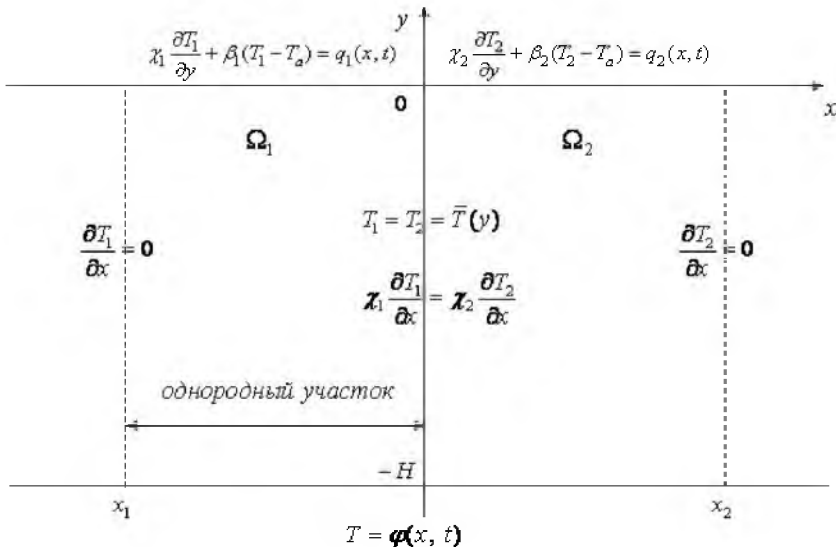


Рис. 1. Почвенный компартимент $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

Пусть система координат выбрана таким образом, что ось $0y$ проходит по границе раздела областей Ω_1 и Ω_2 . Функция T_1 определяет температуру почвы в области Ω_1 , а T_2 – температуру почвы в области Ω_2 . Тогда в силу почвенной однородности областей Ω_1 и Ω_2 можно записать условия:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0 \text{ при } x = -x_1; \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0 \text{ при } x = x_2.$$

На границе раздела компартментов Ω_1 и Ω_2 ($x = 0$) должны выполняться условия непрерывности температур и тепловых потоков:

$$T_1 = T_2 \text{ и } \chi_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \chi_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \text{ при } x = 0.$$

Уравнения теплопереноса в двумерном случае будут иметь вид:

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) + f(x, y, t), \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Введем коэффициенты температуропроводности K_i : $K_i = \frac{\chi_i}{\rho_i c_i}$,

которые также будут функциями пространственных координат x , y , и перепишем уравнение (3) в следующем дивергентном виде:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_i c_i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \chi_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho_i c_i} \left(\frac{\partial}{\partial y} \chi_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho_i c_i} f(x, y, t), \quad i = 1, 2.$$

Для численного решения уравнения (4) применяется численный метод с использованием продольно-поперечной конечно-разностной схемы (метод переменных направлений). Согласно [1, 3], схема расчета для областей Ω_1 и Ω_2 записывается в следующем общем виде:

$$\frac{T^{k+\frac{1}{2}} - T^k}{0.5 \cdot \Delta t} = [K T_x]_x^k + [K T_y]_y^{k+1/2} + F^k,$$

$$\frac{T^{k+1} - T^{k+\frac{1}{2}}}{0.5 \cdot \Delta t} = [K T_x]_x^{k+1} + [K T_y]_y^{k+1/2} + F^k.$$

Здесь $F = \frac{K}{\rho c} \left[\frac{\partial(\rho c)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{1}{\rho c} f(x, y, t)$, Δt – шаг по времени.

Для реализации представленной схемы для каждой области Ω_i , $i = 1, 2$ вводится равномерная разностная сетка (x_n, y_m) . Значения сеточной функции $T(x, y, t)$ в узлах сетки обозначим $T_{n,m}^k = T(x_n, y_m, t^k)$. При этом используется следующая разностная аппроксимация для слагаемых:

$$[KT_x]_x \approx \bar{K}_{n+1} \frac{T_{n+1,m} - T_{n,m}}{h_x^2} - \bar{K}_n \frac{T_{n,m} - T_{n-1,m}}{h_x^2}.$$

Здесь $\bar{K}_{n+1} = K_{n+1/2,m}$, $K_{n+1/2,m} = K(x_{n+1/2}, y_m)$,

$$x_{n+1/2} = x_n + 0.5h_x, \quad h_x = h_1 \text{ или } h_x = h_2.$$

В результате требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -a_{n,m} T_{n,m-1}^{k+1/2} + b_{n,m} T_{n,m}^{k+1/2} - c_{n,m} T_{n,m+1}^{k+1/2} &= d_{n,m}, \\ -a_{n,m} T_{n-1,m}^{k+1} + b_{n,m} T_{n,m}^{k+1} - c_{n,m} T_{n+1,m}^{k+1} &= d_{n,m}, \end{aligned}$$

соответствующую (4). Данные системы решаются методом прогонки. При этом в направлении y используется обычный вариант данного метода [1].

Для определения T_1 и T_2 на слое $(k+1)$ используем условия непрерывности температур и тепловых потоков на границе раздела (2) и представление решения (т.е. температуры в каждой из областей) в таком виде, когда $(T_1)_{n,m}$ и $(T_2)_{n,m}$ выражаются через неизвестные значения температуры $(T_1)_{N_1,m} = (T_2)_{1,m}$ на границе раздела $x = 0$. Представления вида

$$(T_1)_{n,m} = \beta_{n,m}^1 + \gamma_{n,m}^1 \cdot \bar{T}_m, \quad (T_2)_{n,m} = \beta_{n,m}^2 + \gamma_{n,m}^2 \cdot \bar{T}_m,$$

где \bar{T}_m – температура на границе раздела областей Ω_1 и Ω_2 , позволяют организовать своеобразную прогонку с параметрами, коими являются граничные значения температуры \bar{T}_m , и найти сначала сами

эти значения, а затем и распределение температуры в областях Ω_1 и Ω_2 .

Общая схема численного решения задачи состоит в осуществлении следующих этапов.

1. Переход на новый временной слой t^{k+1} начинается с расчета температуры $T_1^{k+\frac{1}{2}}$ и $T_2^{k+\frac{1}{2}}$ на промежуточном временном слое $t^{k+\frac{1}{2}}$.

Расчет производится в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 .

2. Затем, с помощью прогонки с параметрами, вычисляются значения температур T_i^{k+1} , $i = 1, 2$, на слое $(k+1)$ одновременно в обеих областях Ω_1 и Ω_2 .

При расчете теплового поля суточные колебания температуры почвы затухают уже на глубине 40–60 см; сезонные же изменения распространяются на значительно большую глубину [4, 5]. В модели нижнюю границу поместили на расстоянии 160 см от поверхности почвы. Это объясняется наличием экспериментальных данных и отсутствием суточного хода температуры. Поэтому нижнее граничное условие по температуре на этой глубине внутри каждого суток считается постоянным.

Численный алгоритм решения задачи реализован для неоднородного почвенного компартмента. Полученные результаты хорошо согласуются с данными по теплофизическим свойствам выщелоченных черноземов Алтайского Приобья. Они близки как по значениям, так и по характеру зависимостей, и отражают объективные почвенно-физические факторы. Результаты моделирования отражают динамику распределения температур по почвенному профилю в течение суток и в течение года. По результатам проведенных расчетов получены следующие выводы:

- коэффициент объемной теплоемкости линейно растет при увеличении влажности;
- коэффициент температуропроводности с увеличением влажности до некоторой пороговой величины возрастает, затем убывает;
- теплофизические свойства почвы закономерно изменяются в зависимости от плотности сложения генетических горизонтов.

Таким образом, применение предложенных аппроксимирующих функций теплофизических параметров почвы и модели в целом,

позволит не только существенно сократить объем экспериментальных исследований, но и получать новые знания в процессе исследования.

Библиографический список

1. Гончарова О.Н. Моделирование микроконвекции в жидкости, заключенной между теплопроводными массивами // ПМТФ. – 2011. – Т. 52, № 1. – С. 84–91.
2. Хворова Л.А. Математические модели в теории и практике точного земледелия // Известия АлтГУ. – 2011. – №2. – С. 123–128.
3. Хворова Л.А. Модель теплового режима почвы в пространственно-дифференцированных технологиях точного земледелия // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2011. – №4(128). – С. 101–106.
4. Хворова Л.А., Топаж А.Г. Динамическое моделирование и прогнозирование в агрометеорологии. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2010. – 263 с.
5. Хворова Л.А., Жариков А.В. Численное моделирование составляющих теплового режима почв Алтайского Приобья // Известия АлтГУ. – 2013. – № 1/2. – С. 126–130.

УДК 519.216.3

Численный метод расчета полезности инвестиционных проектов после проведения экспертизы

Е.В. Данько
АлтГУ, г. Барнаул

Рассмотрим задачу с условиями, определенными в [1]. Исходный отрезок неопределенности $[a; b]$ для величины NPV после проведения экспертизы делится на три области: $[a; a_1^{Un}]$, $[a_1^{Un}; b_1^{Un}]$, $[b_1^{Un}; b]$.

Для вычисления полезностей всех решений, шаг разбиения отрезка $[a; b]$ обозначим как h . Значение h выберем таким образом, чтобы получалось целое число отрезков длиной h внутри $[a; b]$. При таком подходе, разбиение отрезка $[a; b]$ можно рассмотреть с двух сторон: $x_j^a = a + (j-1) \cdot h$, $j = 1, 2, \dots, N$; $x_j^b = b - (j-1) \cdot h$, $j = 1, 2, \dots, N$.

В случае а), значения a_1^{Un} и b_1^{Un} , вычисленные по формулам заменяются их численными оценками следующим образом: при