шестнадцатой региональной конференции по математике. Барнаул, июнь 2013 г. / под ред. Н.М. Оскорбина. – Барнаул, 2013. – С. 124-127.

УДК 519.677, 519.688

Решение задачи параметрической идентификации динамических моделей продуктивности агроэкосистем

К.А. Немчикова, Л.А. Хворова
АлтГУ, г. Барнаул

1. Постановка задачи параметрической идентификации

Пусть $\Im=\Im(X, S, P, \Sigma, L)$ – упрощенный образ системы (модель), $x_i \in X$, $i=\overline{1,n_x}$ – совокупность входных переменных; $s_i \in S$, $i=\overline{1,n_s}$ – совокупность переменных состояния модели; $p_i \in P$, $i=\overline{1,n_p}$ – совокупность параметров модели; $\sigma_i \in \Sigma$, $i=\overline{1,n_\sigma}$ – совокупность внутренних связей в модели между переменными (структура модели). Функция $L=\left\{L_1,...,L_{n_S}\right\}$ – разрешающий оператор совокупности математических соотношений, позволяющий по заданным входам $x_i \in X, i=\overline{1,n_x}$, находить функции $s_i \in S$, $i=\overline{1,n_s}$, на интервале $t_0 \le t \le t_n$: $S(t+1)=L(X(t),S(t),P,\Sigma,t)$. Данная зависимость – закон функционирования модельной системы $\Im$.

Задача *параметрической идентификации* сводится к оцениванию параметров $p_i \in P$, $i=\overline{1,n_p}$. Решение поставленной многомерной задачи достигается методами глобальной оптимизации [1] и заключается в следующем:

$$Z(P^*)=\min_{P\in D}\left|S(P)-S_{real}\right|, \tag{1}$$

где P^* – вектор оптимальных значений параметров, $S(P)$ – переменные состояния модели, S_{real} – фактические значения переменных состояния,

$$D=[a,b]=\{P\in\mathbb{R}^n:\ a(j)\le P(j)\le b(j),\ 1\le j\le n_p\}. \tag{2}$$

Будем предполагать, что целевая функция (1) является многоэкстремальной, недифференцируемой, заданной в форме черного ящика и удовлетворяющей в области поиска $D \subset \mathbb{R}^n$ условию Липшица с неизвестной константой Липшица $0 < L < \infty$:

$$\left|Z(P') - Z(P'')\right| \le L\left\|P' - P''\right\|, \quad P', P'' \in D, \quad 0 < L < \infty, \qquad (3)$$

где $a, b \in \mathbb{R}^n$ – заданные векторы, $\| \cdot \|$ – евклидова норма.

Определение оптимальных значений параметров является задачей поиска глобального минимума функционала (1) и представляет собой достаточно сложную и трудоемкую задачу. Определение оптимальной комбинации параметров аналитически не представляется возможным в силу сложности модельной структуры *Agrotool*: блочный характер описания процессов, взаимосвязь и взаимозависимость информационных потоков внутри модели, поэтому возникает необходимость применения численных методов.

В свою очередь проблема численного решения задачи оптимизации (1)–(3) сопряжена со значительной размерностью вектора идентифицируемых параметров модели *P*, многоэкстремальностью и недифференцируемостью целевой функции (1). На рисунке 1 приведена двумерная многоэкстремальная целевая функция невязки для влажности почвы. Поведение целевой функции отличается очень узкими и глубокими пиками и впадинами, которые могут находиться между точками вычислений. Для успешного решения оптимизационной задачи (1)–(3)

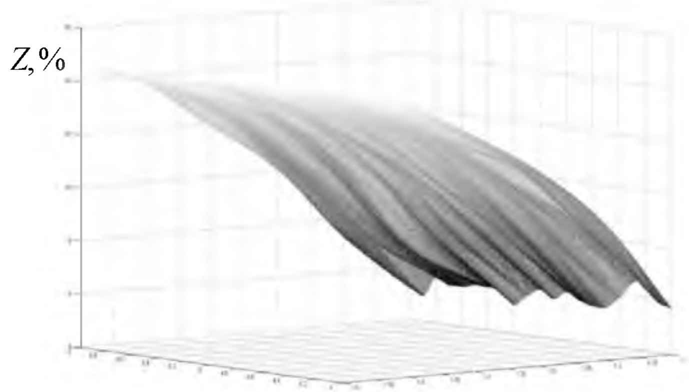

Рис. 1. Двумерная многоэкстремальная целевая функция невязки для влажности почвы

использование методов нелинейной локальной оптимизации оказывается недостаточным в силу наличия нескольких локальных минимумов, имеющих разные значения целевой функции. «Локальные методы, как правило, оказываются не в состоянии покинуть зоны притяжения локальных оптимумов и, следовательно, упускают глобальный экстремум» [1].

2. Методы и алгоритмы глобальной оптимизации

Если минимизируемая функция имеет больше одного экстремума и нужно найти наименьший из них, то ни один из классических методов и алгоритмов поиска локального экстремума не решит поставленную задачу. Ввиду высокой сложности поиска глобального решения многоэкстремальной задачи используют эффективные алгоритмы, например, *диагональный подход* [1] или *метод имитации отжига* [2].

При использовании диагонального подхода для целей идентификации в (2) были определены три гиперинтервала D_i (для параметров трех блоков модели: динамики влажности почвы, фенологического развития и продуктивности посева). Каждый D_i разбивается на множество гиперинтервалов D_i^k, $i=1,2,3$ – для параметров трех блоков модели, $1 \le k \le M_i$ – число гиперинтервалов в каждой области D_i. Целевые функции $Z_i(P)$, $i=1,2,3$, вычисляются в двух вершинах, a_i и b_i, главной диагонали каждого гиперинтервала D_i^k. В работе [1] описаны различные диагональные стратегии разбиения, и приведены вычислительные схемы диагональных алгоритмов, которые авторы статьи применили в своем исследовании.

3. Результаты параметрической идентификации с помощью оптимизационных процедур

В результате проведенного исследования построена оптимизационная процедура параметрической идентификации блоков модели: динамики влажности почвы, фенологического развития и продуктивности посева [3, 4]. В каждой области D_i, $i=1,2,3$, была построена неравномерная сетка, уплотняющаяся в окрестности глобального минимума.

Результаты идентификации блока влагопереноса в почве

В основу модели влагопереноса в модели *Agrotool* [5] положено уравнение Ричардса:

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k^w(P_s)\frac{\partial P_s(x,t)}{\partial x} - 1 \right) - f(x,t),$$

где t – время; x – пространственная координата; θ – объемная влажность почвы; P_s – капиллярно-сорбционный потенциал почвенной влаги; $k^w(P_s)$ – функция влагопроводности: $k^w(P_s) = Kf \cdot (-P_s)^C$, Kf – коэффициент фильтрации (см/сут), C – эмпирический параметр; $f(x,t)$ – функция стока.

Коэффициент фильтрации Kf и показатель степени C определяются диагональным методом глобальной оптимизации. Целевая функция (1) принимает вид (4):

$$Z_1(Kf, C) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \left| \left(\theta_{soil}(i,j) - \theta_{real}(i,j) \right) \right| \to \min_{Kf, C \in P} . \qquad (4)$$

Здесь $\theta_{real}(i,j)$ – фактические значения влагозапаса, $\theta_{soil}(i,j)$ – расчетные значения, $i = \overline{1,m}$ – номер года, m – общее число лет, за которые производится компьютерный эксперимент, $j = \overline{1,k_i}$ – число фактических замеров влагозапаса в почве в течение m лет.

Для *тяжелосуглинистых почв* минимальная средняя погрешность по формуле (4) – 5,4% достигнута при оптимальных значениях Kf =5,9 и C=1,1. График средней относительной погрешности приведен на рисунке 2.

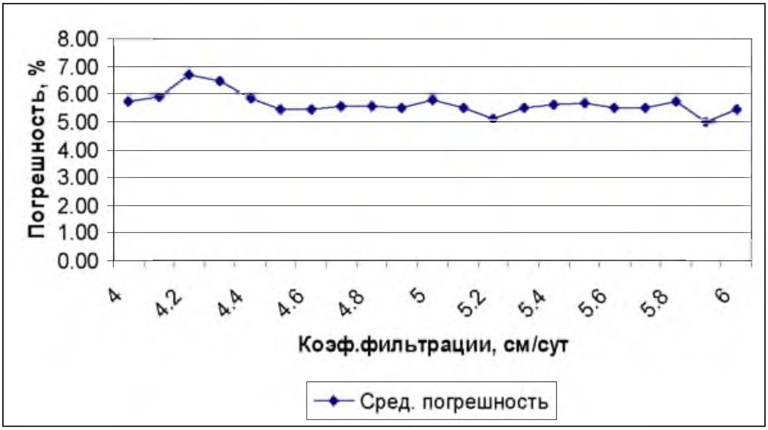

Рис. 2. График средней относительной погрешности вычисления запасов влаги в почве в зависимости от величины коэффициента фильтрации, C=1,1 (суглинок тяжелый)

Для *среднесуглинистых почв* минимальная погрешность составила 7% при оптимальных значениях Kf =61,2 и C=1,4. Координаты точки глобального минимума при идентификации параметров блока динамики влажности в почве определены при помощи вычисления значений невязок на сетках с различными шагами для Kf и C. Разбиение двумерного (суженного) гиперинтервала D_1^k потребовало выполнения 1920 вычислительных процедур прежде, чем был найден глобальный минимум, k – индекс текущего разбиения области D.

Определение допустимых границ изменения параметров блоков осуществлялось с помощью методов теории чувствительности. В процессе исследования определены функции чувствительности модели как функции влияния изменений параметров на решение задачи [6]. Показано, что для тяжелосуглинистых почв допустимый интервал изменения Kf – (4.0–6.0); значения C не только сильно влияют на динамику влажности почвы, но и на величину урожая и поэтому требования к величине C достаточно жесткие: C =1.1. Аналогичная ситуация наблюдается и для легкосуглинистых почв: Kf – (40–65), C =1.4. Анализ на чувствительность модели осуществлен также к другим гидрофизическим параметрам почвы и начальному состоянию модели.

Результаты идентификации блока фенологического развития

Задачами этого блока являются: расчет так называемого «физиологического времени», измеряемого в градусо-днях, и сроков наступления фенологических фаз. В модели *Agrotool* приращение физиологического времени в день k вычисляется по формуле:

$$\Delta\tau(k) = \Delta\tau_0(1-\Delta\tau_0/c_1)\cdot \mathrm{Str}(\psi_s),$$

где

$$\Delta\tau_0(k) = \begin{cases} (T_{av}(k)-T_0) & \text{при} \quad T_{av}(k)\ge T_0, \\ 0 & \text{при} \quad T_{av}(k)\le T_0, \end{cases}$$

$T_{av}(k)$ – среднесуточная температура воздуха в день k, $k=\overline{1,365}$; T_0 – биологический нуль, c_1 – константа; ψ_s – потенциал воды в почве;

$$Str(\psi_s) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad \psi_s \ge \psi_{opt}, \\ 1+(S_0-1)\dfrac{\psi_s-\psi_{opt}}{\psi_w-\psi_{opt}}, & \textit{если} \quad \psi_s \le \psi_{opt}, \end{cases}$$

ψ_w – потенциал воды в почве, соответствующий влажности завядания. Величина прироста биологического времени определяется по формуле $\tau(k)=\sum\limits_{j=k_0}^{k}\Delta\tau(j)$, где k_0 – номер дня сева; k – номер текущего дня. Очередная фаза наступает при достижении величиной $\tau(k)$ некоторого порогового значения $T_{Ph}(IPh)$, зависящего от порядкового номера фазы IPh: $\tau(k) \geq T_{Ph}(IPh)$.

При идентификации пороговых значений определялось минимальное расхождение между расчетными и фактическими датами наступления фенофаз. В таблице 1 приведены оптимальные значения биологических порогов.

Таблица 1

Результаты идентификации пороговых значений

Название фазы	Пороговые значения
Всходы	82
Кущение	176
Выход в трубку	214,2
Колошение	363,4
Цветение	420
Молочная спелость	540
Восковая спелость	700
Полная спелость	805

Результаты идентификации блока продуктивности растений

Результатом окончательной идентификации параметров модели является величина урожайности культуры. Для ОПХ им. Докучаева Алтайского края расчетные и фактические величины урожаев яровой пшеницы представлены в таблице 2. Средняя относительная погрешность составила 12%.

Численные эксперименты с использованием описанных оптимизационных процедур поиска глобального минимума в задаче идентификации параметров модели и анализа на чувствительность позволили: 1) разработать критерии точности задания областей допустимых значений параметров модели; 2) выявить особенности в настройке параметров блоков (среди почв с текстурой суглинок средний и суглинок тяжелый выделены почвы с текстурой – суглинок легкий, что существенно сказалось на качестве поиска глобального минимума; параметры блока фенологического развития зависят от типа почвы и сорта культуры (в модели такие зависимости не предусмотрены); параметры

Таблица 2

Расчетные и экспериментальные величины урожаев, ц/га

Урожайность		
Годы	Фактическая	Расчетная
1999	12,2	13,2
2000	22,2	22,0
2001	20,2	19,6
2002	22,1	23,3
2003	15,4	14,1
2004	14,1	10,2
2005	14,1	19,0
2006	25,4	20,4
2007	17,6	17,4
2008	18,9	20,1
2009	35,5	38,5
2010	19,4	21,6

продуктивности посева напрямую зависят от сорта культуры (в модели параметры одинаковые для всех сортов)). Учет особенностей в настройке параметров показал достаточно высокую эффективность описанного оптимизационного подхода к поиску глобальных минимумов в задаче идентификации параметров и позволил дать высокую качественную оценку применимости модели *Agrotool* для прогноза урожайности зерновых культур в условиях Алтайского края.

Библиографический список

1. Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

2. Шарый С.П. Стохастические подходы в интервальной глобальной оптимизации // Труды XIII Байкальской межд. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т. 4 «Интервальный анализ». – Иркутск, ИСЭМ СО РАН, 2005.

3. Хворова Л.А. Идентификация параметров модели фенологического развития зерновых культур в условиях Алтайского края // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2010. – Т. 17. – Вып. 3.

4. Хворова Л.А. Оптимизация процесса структурно-параметрической идентификации моделей продуктивности агроэкосистем // Известия АлтГУ. – 2012. – №1.

5. Хворова Л.А., Топаж А.Г. Построение моделей агроэкосистем и их адаптация к конкретным условиям // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2011. – №1(115).

6. Хворова Л.А. Методы исследования чувствительности моделей продуктивности агроэкосистем // Известия АлтГУ. – 2013. – №1.

УДК 330.131.7

Исследование влияния параметров перестрахования накопительной части пенсии на эффективность НПФ

С.П. Пронь, Л.В. Сидун, Д.Ю. Сидун

АлтГУ, г. Барнаул

В [1] представлены модели перестрахования для трех инструментов, которые предлагались некоторыми НПФ до реформы, и неизбежно будут применяться с 2015 года уже реформированными ОАО НПФ. Первый – получение пенсионного капитала в виде шарового платежа в установленный срок, второй – расходование пенсионного капитала пенсионером в виде конечной ренты т.е. рентными платежами за определенный срок, и третий – в виде бесконечной ренты, т.е. пожизненными рентными платежами. В моделях предполагается, что ответственность ОАО НПФ делится с перестрахователем-государством в пропорции p:q (p+q=1), т.е. часть p комиссии за обслуживание капитала переходит к перестраховщику, а часть q является премией НПФ. При этом часть q непосредственно участвует в обеспечении обязательств НПФ перед пенсионером, а часть p используется при одноразовом возвращении номинала накоплений при банкротстве НПФ. То, что государство готово выступить в качестве перестаховщика в управлении накопительной части пенсионного капитала граждан, следует из проведенной в 2013 году пенсионной реформы. Для снижения появляющихся рисков государство готово выступить в облигаторном страховании как перестраховщик, но с ответственностью только за номинальный объем накоплений и с огромной франшизой в размере собственного капитала НПФ. Тем не менее, облигаторное по выбору цессионария цессия может быть факультативной для цедента по инструментам снижения рисков собственного удержания [2].

В докладе представлены результаты исследования, проведенного с использованием имитационного моделирования, влияния параметров p и q на величину современной стоимости ренты постнумерандо – пен-