хранения такого порядка может быть решена при помощи того же перехода к естественной параметризации кривой.

При решении обоих рассмотренных задач преобразования, минимизирующие критерий качества, оказались существенно нелинейными.

В работе детализирована схема общего алгоритма визуализации, рассмотрены некоторые примеры современных нелинейных алгоритмов с практическими приложениями и анализом результатов. Поставлена задача разработки естественной параметризации двумерного многообразия.

На взгляд автора, преимущества нелинейных методов визуализации перед линейными проявляются в основном в случае, когда многомерные данные фактически близки к двумерным, то есть исходные точки расположены близко к некоторой изогнутой двупараметрической поверхности. Поэтому критериями, минимизация которых будет давать существенно лучшие результаты при применении нелинейных методов, будут те, которые описывают степень близости (или какое-то отношение типа порядка) выборочных точек вдоль кривой двупараметрической поверхности. В частности, такие критерии могут быть связаны с естественными параметризациями двумерных многообразий.

Автором рассмотрены примеры разных визуализаций таких данных – линейные и нелинейные. Наилучший результат показал метод с использованием естественной параметризации кривой.

Основные перспективы исследования, начатого в работе, связаны с разработкой новых естественных критериев качества визуализации, наглядно раскрывающих преимущества нелинейных методов и создания новых алгоритмов, оптимальных с точки зрения этих критериев.

Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных алгебрах Ли с конформно полуплоской частью тензора Вейля

О.П. Гладунова, Е.Д. Родионов
АлтГУ, АлтГПА, г. Барнаул

Пусть (M, g) − ориентированное риманово многообразие размерности 4. Обозначим через R, r и s тензор кривизны Римана, тензор Риччи и скалярную кривизну соответственно, а через W − тензор Вейля. Риманова метрика g индуцирует метрику на расслоении $\Lambda^2 M$ 2-векторов M по правилу $g(X_1 \wedge X_2, X_3 \wedge X_4) = \det(g(X_i, X_j))$. Оператор кривизны R является симметричным эндоморфизмом Λ^2M, определенным равенством $g(X \wedge Y, \mathbf{R}(Z \wedge T)) = R(X, Y, Z, T)$. Оператор Ходжа $*$ задает эндоморфизм на Λ^2M такой, что $*^2 = Id$. Откуда Λ^2M$= \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$, где Λ^+ и Λ^- есть соответственно собственные подпространства, отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 оператора $*$. Оператор кривизны $\mathbf{R}$ относительно этого разложения можно представить в блочном виде [1]:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} W^+ + \frac{s}{12} Id & Z \\ Z^t & W^- + \frac{s}{12} Id \end{pmatrix},$$

где W^+ и W^- – *автодуальная* и *антиавтодуальная* состовляющие тензора Вейля W.

Многообразия, для которых одна из этих компонент обращается в нуль, называются *конформно полуплоскими*. Многообразия, для которых тензор Вейля тривиален, называются *конформно плоскими*.

Классификация конформно плоских однородных римановых многообразий получена Д.В. Алексеевским и Б.Н. Кимельфельдом в [2].

В настоящей работе исследуются четырехмерные группы Ли с конформно плоскими и конформно полуплоскими левоинвариантными римановыми метриками, и дается их полная классификация.

Пусть далее M=G – четырехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Заметим, что в силу инвариантности римановой метрики вопрос об исследовании автодуальных и антиавтодуальных составляющих тензора Вейля на группах Ли может быть сведен к изучению соответствующих объектов на алгебре Ли группы Ли.

Следуя работам [3, 4], фиксируем базис, в котором структурные константы имеют удобный для вычисления вид в случае четырехмерных алгебр Ли. Определяя компоненты W^+ и W^- в указанном базисе, мы классифицируем конформно полуплоские вещественные четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Теорема 1. *Пусть G – вещественная четырехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда $W^+ = 0$ если и только если $W = 0$.*

Теорема 2. *Пусть G – вещественная четырехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой такая, что $W^- = 0$. Тогда либо $W = 0$, либо алгебра Ли группы G и ее структурные константы содержатся в следующей таблице:*

Алгебра Ли	Структурные константы c_{ij}^{k}
$A_{4,9}^{\beta}$ $(1<\beta\le 1)$	$c_{1,4}^{1}$ =2A, $c_{2,3}^{1}=c_{2,4}^{2}=c_{3,4}^{3}$ =A, A>0
	$c_{1,4}^{1}=c_{2,3}^{1}$ =2A, $c_{2,4}^{2}=c_{3,4}^{3}$ =A, A>0
$A_{4,11}^{\alpha}$ $(\alpha>0)$	$c_{1,4}^{1}$ =2Aα , $c_{2,3}^{1}=c_{2,4}^{2}=c_{3,4}^{3}$ =Aα ,$c_{2,4}^{3}=-c_{3,4}^{2}=-$A, A>0
	$c_{1,4}^{1}=c_{2,3}^{1}$ =2Aα , $c_{2,4}^{2}=c_{3,4}^{3}$ =Aα ,$c_{2,4}^{3}=-c_{3,4}^{2}=-$A, A>0

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (№ 08-01-98001), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ РФ (№ НШ-5682.2008.1), а также при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (№ 02.740.11.0457).

Библиографический список

1. Singerland I.M., Thorpe J.A. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces // Global Analisis, Papers in honor of K. Kodaira. − 1969. − P. 355-365.

2. Алексеевский Д.В., Кимельфельд Б.Н. Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий // Мат. заметки. 1978. −Т.24, №1. − С. 103–110.

3. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. – 2008. – Т11, №2. – С. 115–147.

4. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. – 2009. – Т12, №1. – С. 40–113.

Решение бескоалиционной игра трех лиц с помощью пакета Maple

К.О. Кизбикенов

АлтГПА, г. Барнаул

Рассматриваются диадические игры трех лиц [1]. Задача заключается в поиске точек равновесия по Нешу в смешанных стратегиях. Пусть $X=[x,1-x]$, $Y=[y,1-y]$, $Z=[z,1-z]$ – смешанные стратегии игроков. А функции выигрышей игроков заданы в виде трехмерных матриц A_{ijk}, B_{ijk} и C_{ijk}, где $i,j,k=1..2$. Тогда ситуация $[X,Y,Z]$ будет ситуацией равновесия по Нешу, если выполняются неравенства