Библиографический список

1. Михайличенко Г.Г., Малышев А.И. Феноменологическая симметрия и функциональные уравнения // Известия вузов. Математика. 2001. №7.
2. Курош А.Г. Теория групп. 1967.

О фильтре в решетке квазимногообразий

С.С. Глотов
АлтГУ, г. Барнаул

Пусть M – многообразие заданное тождеством $[x^2, y^2]$, и N – его собственное подквазимногообразие. Через LqM условимся обозначать решетку квазимногообразий, содержащихся в квазимногообразии M. Так как LqM частично упорядоченное множество по включению, то N порождает в нём фильтр.

Теорема. Фильтр, порожденный в решетке LqM квазимногообразием N, бесконечен.

Замечание. Если N содержит все абелевы группы и не содержит некоторую нильпотентную группу, то фильтр порождённый N, континуален.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (мероприятие 1).

О группе автоморфизмов конечных локальных колец характеристики *p*

Журавлев Е.В.
АлтГУ, г. Барнаул

Пусть R – конечное локальное кольцо характеристики p, $J(R)$ – радикал Джекобсона кольца R, $J(R)^3 \neq 0$, $J(R)^4 = 0$. Тогда существуют натуральные числа s_1, s_2, s_3, некоторые элементы $u_1,\dots,u_{s_1} \in J(R) \setminus J(R)^2$, $v_1,\dots,v_{s_2} \in J(R)^2 \setminus J(R)^3$, $w_1,\dots,w_{s_3} \in J(R)^3$ и автоморфизмы $\sigma_1,\dots,\sigma_{s_1}$, $\theta_1,\dots,\theta_{s_2}$, $\tau_1,\dots,\tau_{s_3} \in Aut(F)$ такие, что R представимо в виде прямой суммы (см. [1])

$$R = F \oplus \sum_{i=1}^{s_1} Fu_i \oplus \sum_{i=1}^{s_2} Fv_i \oplus \sum_{i=1}^{s_3} Fw_i \ ,$$

причем $\forall r_0 \in F$ $u_i r_0 = r_0^{\sigma_i} u_i$, $v_i r_0 = r_0^{\theta_i} v_i$ и $w_i r_0 = r_0^{\tau_i} w_i$.

Обозначим через l_1, l_2 и l_3 соответственно количество различных автоморфизмов совокупностей $\{\sigma_1,\ldots,\sigma_{s_1}\}$, $\{\theta_1,\ldots,\theta_{s_2}\}$ и $\{\tau_1,\ldots,\tau_{s_3}\}$. Пусть

$$U_i = \sum_{\sigma_j=\sigma_i} Fu_j,\ i = 1,..,l_1,\quad V_i = \sum_{\theta_j=\theta_i} Fv_j,\ i = 1,..,l_2 \text{ и } W_i = \sum_{\tau_j=\tau_i} Fw_j,\ i = 1,..,l_3,$$

где σ_j, θ_j, τ_j – автоморфизмы, связанные соответственно с u_j, v_j, w_j.

Теорема.

$$\varphi \in Aut(R) \Leftrightarrow \varphi\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right) =$$

$$= x\alpha_0^{\rho}x^{-1} + \sum_{i=1}^{s_1} x\alpha_i^{\rho}x^{-1}\varphi_j(u_i) + \sum_{\theta_j=\sigma_i} q_{ji}x\alpha_i^{\rho}x^{-1}v_j + \sum_{i=1}^{s_2} x\beta_i^{\rho}x^{-1}\phi_j(v_i) +$$

$$+ \sum_{\tau_j=\sigma_i} n_{ji}x\alpha_i^{\rho}x^{-1}w_j + \sum_{\tau_j=\theta_i} s_{ji}x\beta_i^{\rho}x^{-1}w_j + \sum_{i=1}^{s_3} x\gamma_i^{\rho}x^{-1}\psi_j(w_i),$$

где $\rho \in Aut(F)$, α_0, α_i, β_i, γ_i, q_{ji}, n_{ji}, $s_{ji} \in F$, x – некоторый обратимый элемент кольца R, $\varphi_j \in Aut(U_j)$, если $u_i \in U_j$, $\phi_j \in Aut(V_j)$, если $v_i \in V_j, \psi_j \in Aut(W_j)$, если $w_i \in W_j$.

Пусть A и B – подгруппы некоторой группы G. Если A – нормальная подгруппа, $A \cap B = \{e\}$ и $G = AB$, то группа G является полупрямым произведением своих подгрупп A и B. Полупрямое произведение обозначим $G = A \times_{\phi} B$, где $\phi \in Aut(A)$ (см. [2]).

Теорема. Пусть $\varphi(F) = F$ для всякого $\varphi \in Aut(R)$. Тогда

$$Aut(R) \cong \left[\left(M_{s'_2\times s'_1}(F) \times M_{s'_3\times s'_1}(F)\right) \times_{\varsigma} M_{s''_3\times s''_2}(F)\right] \times_{\xi}$$

$$\times_{\xi}\left[\left(\prod_{i=1}^{l_1} GL_{m_i}(F) \times \prod_{i=1}^{l_2} GL_{n_i}(F) \times \prod_{i=1}^{l_3} GL_{p_i}(F)\right) \times_{\zeta} Aut(F)\right],$$

где $m_i = \dim_F U_i$, $n_i = \dim_F V_i$ и $p_i = \dim_F W_i$.

Библиографический список

1. Журавлев Е.В. Конечные локальные кольца порядка p^6 и характеристики p, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре // Известия Алтайского государственного университета. – 2006. – №1 (49). – С. 17–32.

2. Холл М. Теория групп. – М. : Иностранная литература, 1962.

О бесконечно базируемых векторных пространствах небольших размерностей

И.М. Исаев, А.В. Кислицин
АлтГПА, г. Барнаул.

Пусть F – некоторое поле, $\vec{R}$ – векторное пространство над полем F, являющееся подпространством (не обязательно подалгеброй) некоторой F-алгебры R. Полином $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in F[x_1, x_2, ..., x_n]$ назовем тождеством векторного пространства $\vec{R}$, если в алгебре R $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ при всех $x_1, x_2, ..., x_n \in \vec{R}$ и тождеством алгебры R, если $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ для всех $x_1, x_2, ..., x_n \in R$. Скажем, что R – конечно базируемая алгебра (КБ-алгебра), если все тождества R следуют из конечной совокупности тождеств R. В противном случае будем говорить, что R – не конечно базируемая алгебра (НКБ-алгебра). Аналогичную терминологию будем применять к векторным пространствам.

В работах [1, 2, 3] был приведен пример четырехмерного НКБ-пространства. Помимо этого было построено конечное бесконечно базируемое векторное пространство. В [4] доказано, что трехмерное векторное пространство треугольных матриц не имеет конечного базиса тождеств.

Позже авторами настоящей работы было доказано, что двумерное векторное пространство $A = < e_{11} + e_{12}, e_{22} >_F$ над полем нулевой характеристики бесконечно базируемо. Вместе с работой [5] это дает пример неассоциативной четырехмерной НКБ-алгебры (ранее в [6] был указан пример неассоциативной пятимерной НКБ-алгебры). Поскольку тождества любого одномерного векторного пространства задаются конечным набором тождеств, построенное НКБ-пространство имеет минимальную размерность.

Исследование конечной базируемости тождеств пространства A в случае $F = GF(2)$ привело к следующему результату.

Теорема. Векторное пространство

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in GF(2) \right\}$$

является НКБ-пространством с базисом тождеств