– радиус и центр вписанной сферы симплекса, М – его центроид. Тогда стороны треугольника ОТМ связаны формулой:

$$2n\ OT^2 = (n+1)(OM^2 + n\ TM^2) + (n-1)(R^2 - n^2r^2).$$

Следствие 1. Пусть R и O – радиус и центр описанной окружности *произвольного* треугольника, r и T – радиус и центр вписанной окружности, М – центроид треугольника. Тогда стороны треугольника ОТМ связаны формулой:

$$4\ OT^2 = 3\ (OM^2 + 2\ TM^2) + R^2 - 4r^2.$$

Следствие 2. Пусть R и O – радиус и центр описанной сферы ортоцентрического тетраэдра, r и T – радиус и центр вписанной сферы тетраэдра, М – его центроид. Тогда стороны треугольника ОТМ связаны формулой:

$$3\ OT^2 = 2\ (OM^2 + 3\ TM^2) + R^2 - 9r^2.$$

Свойства псевдовекторного произведения

Е.И. Кузнецова

АлтГУ, г. Барнаул

Пусть $R^3 = \left\{(x^1,x^2,x^3)\mid x^1,x^2,x^3 \in R\right\}$ – трехмерное векторное пространство, и $\vec{x} = (x^1,x^2,x^3)$, $\vec{y} = (y^1,y^2,y^3)$ – два вектора в R^3. Тогда псевдоскалярное произведение в ортобазисе определяется [1,2] следующим образом: $\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle = -x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$.

Пространство с определенным на нем псевдоскалярным произведением $\left(R^3,\langle,\rangle\right)$ называется [1] трехмерным псевдоевклидовым пространством. Обозначается R_1^3.

В псевдоевклидовом пространстве R_1^3 введем псевдовекторное произведение [2]:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = (a^3b^2 - a^2b^3, a^3b^1 - a^1b^3, a^1b^2 - a^2b^1).$$

В работе доказаны следующие свойства псевдовекторного произведения:

1. $\vec{b} \wedge \vec{a} = -(\vec{a} \wedge \vec{b})$;

2. $\left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;

3. $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \right\rangle$;

4. $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = -(\vec{b}\left\langle \vec{a}, \vec{c} \right\rangle - \vec{c}\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle)$;

5. $\left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \wedge \vec{d} \right\rangle = -\begin{vmatrix} \left\langle \vec{a}, \vec{c} \right\rangle & \left\langle \vec{a}, \vec{d} \right\rangle \\ \left\langle \vec{b}, \vec{c} \right\rangle & \left\langle \vec{b}, \vec{d} \right\rangle \end{vmatrix}$;

6. Вектор $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

7. 1) Если вектор $\vec{a}$ – мнимой длины, то $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ – вектор действительной длины;

2) Если вектор $\vec{a}$ – действительной длины, то $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ – может быть любой;

3) Если $\vec{a}$ – изотропный, то вектор $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ – либо коллинеарен вектору $\vec{a}$, либо действительной длины;

8. Для неизотропных однотипных векторов (оба мнимые или оба действительные) вводится угол по формуле:

$$\cos\phi = \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Если оба вектора мнимой длины, то угол считается мнимым, $\phi = i\varphi$.

Имеет место свойство:

$$\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|^2 = -|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \varphi;$$

Библиографический список

1. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. – М.: Наука, 1969.

2. Izumiya S., Pei D., Sano T., Torii E. Evolutes of Hyperbolic Plane Curves, Acta Mathematica Sinica, 2004.

3. Кузнецова Е.И., Чешкова М.А. Использование математического пакета MAPLE при изучении геометрии Лобачевского // МАК–2009: материалы двенадцатой региональной конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2009.