Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных

С.П. Шарый
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с интервальными $m\times n$-матрицей $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ и m-вектором $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ множеством решений называется множество [1]

$$\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\},$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$, для которых $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$. Если множество решений $\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ непусто, то говорят, что интервальная система уравнений разрешима. Мы исследуем методы проверки разрешимости интервальных линейных систем уравнений, а также нахождения точки из непустого множества решений $\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$. В самой общей ситуации эта задача NP-трудна.

Пусть $\langle \boldsymbol{a} \rangle$ – мигнитуда интервала $\boldsymbol{a}$, т.е. наименьшее расстояние его точек до нуля, mid $\boldsymbol{a}$ и rad $\boldsymbol{a}$ – середина и радиус интервала $\boldsymbol{a}$. Тогда выражением

$$\mathrm{Uni}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \min_{1\leq i\leq m}\Big\{\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \Big\langle \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \textstyle\sum_j \boldsymbol{a}_{ij}\,x_j \Big\rangle\Big\}$$

задаётся функционал Uni: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такой что принадлежность точки x множеству решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ равносильна неотрицательности в x функционала Uni :

$$x \in \Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \geq 0.$$

Функционал $\mathrm{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, который мы называем *распознающим функционалом* множества решений системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, является вогнутым в каждом ортанте пространства $\mathbb{R}^n$, а если в интервальной матрице $\boldsymbol{A}$ некоторые столбцы целиком точечные, то Uni вогнут и на объединениях нескольких ортантов. Кроме того, функционал Uni достигает конечного максимума на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $\mathrm{Uni}(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$, то x – точка внутренности множества решений, а при некоторых дополнительных ограничениях на $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ и x верно и обратное.

Как следствие этих результатов, естественно приходим к следующей методике исследования разрешимости интервальных линейных систем уравнений. Решаем задачу безусловной максимизации распознающего функционала Uni. В случае, когда полученное значение максимума функционала больше либо равно нулю, множество решений непусто и ему принадлежит аргумент максимума Uni. Если же максимум распознающего функционала отрицателен, то множество решений интервальной системы пусто.

Приложением разработанной техники может служить задача определения параметров линейной зависимости по неточным данным измерений. Традиционно она сводится к нахождению решения (обычного или в обобщённом смысле) для системы уравнений, построенной по данным измерений. Если же эти данные имеют интервальные неопределённости, оценкой параметров естественно взять точку из множества решений соответствующей интервальной системы уравнений (см., к примеру, [2]), хотя в общем случае прямое применение этого подхода приводит к парадоксам. Для их преодоления имеет смысл ввести количественную меру согласования данных, допустив её отрицательные значения в случае несогласованных (противоречивых) данных, когда множество решений соответствующей интервальной системы пусто. В качестве меры согласования мы предлагаем брать значение распознающего функционала Uni, а оценкой параметров при этом считается точка, в которой достигается максимум распознающего функционала Uni.

Для численной реализации процедуры успешно применимы методы негладкой выпуклой оптимизации, развитые в [3] и других работах, так что в целом получаем эффективную методику обработки данных с интервальными неопределённостями. Она является перспективной альтернативой традиционным подходам к обработке данных, основанным на теоретико-вероятностной модели ошибок.

Библиографический список

1. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск, 2011. – Электронная книга, доступная на http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks.

2. Вощинин А.П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы // Заводская лаборатория. – 2002. – Т. 68, № 1. – С. 118-126.

3. Шор Н.З., Журбенко Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // Кибернетика. – 1971. – №3. – С. 51-59.