9. Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D. Compact 6-dimensional Homogeneous Einstein Manifolds // Doklady Mathematics. – 1999. – V. 336. – P. 599.

10. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Левоинвариантные лоренцевы метрки на 3-мерных группах Ли с нулевым квадратом длины тензора Схоутена-Вейля // Вестник Алтайской государственной педагогической академии. – 2004. – № 4-3. – С. 53–60.

11. Родионов Е.Д. Однородные римановы многообразия с метрикой Эйнштейна. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Новосибирск, 1994.

12. Rodionov E.D. Simply Connected Compact Five-dimensional Homogeneous Einstein Manifolds // Siberian Mathematical Journal. – 1994. – V. 35. – P. 163.

13. Nikonorov Y.G., Rodionov E.D. Standard Homogeneous Einstein Manifolds and Diophantine Equations // Archiv der Mathematik. – 1996. – V. 32. – P. 123.

14. Rodionov E.D. Standard Homogeneous Einstein Manifolds // Доклады Академии наук. – 1993. – V. 328, № 2. – P. 147.

15. Родионов Е.Д., Славский В.В. Одномерная секционная кривизна римановых многообразий // Доклады Академии наук. – 2002. – Т. 387, № 4. – С. 454.

16. Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D. Compact six Dimensional Homogeneous Einstein Manifolds // Доклады Академии наук. – 1999. – Т. 366, № 5. – С. 599–601.

17. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Математические труды. – 2006. – Т. 9(1). – С. 130–168.

УДК 514.1 (075)

О линиях в n-мерном аффинном пространстве с аффинно-эквивалентными дугами

И.В. Поликанова

АлтГПА, г. Барнаул

В статье обобщается результат автора, гласящий, что всякие две дуги параболы аффинно-эквивалентны [1].

Будем рассматривать линии в n-мерном аффинном пространстве A^n. Под линией понимаем одномерное многообразие, под дугой линии

– образ числового отрезка $[a, b]$ при вложении его в линию. Условимся дугу с концами A и B обозначать AB.

Дугу AB линии считаем ориентированной, если конец A считается первым, а конец B – вторым.

Ориентированные дуги AB и CD линии называются аффинно-эквивалентными, если существует аффинное преобразование f пространства, отображающее дугу AB на дугу CD, такое, что $f(A)=C$ и $f(B)=D$. В дальнейшем аффинное преобразование пространства для краткости будем называть просто аффинным преобразованием.

Линии, любые две дуги которых аффинно-эквивалентны, будем называть *линиями с аффинно-эквивалентными дугами* или *обладающими свойством аффинной эквивалентности дуг (здесь и ниже верхний индекс означает степень).*

Теорема 1. *Линия γ, задаваемая в некоторой аффинной системе координат параметризацией $\vec{r} = (t, t^2, t^3, \dots, t^i, \dots, t^n)$, $t \in R$, обладает свойством аффинной эквивалентности дуг.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n = 3$, т. е. линия γ в A^3 задаётся параметризацией $\vec{r} = (t, t^2, t^3)$. При *аффинном* преобразовании f задаваемом формулами

$$\overline{x_i}=a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + b_i\,, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

она отобразится в линию $f(\gamma)$

$$\vec{r} = (a_{1i}t^i + b_1,\ a_{2i}t^i + b_2,\ a_{3i}t^i + b_3).$$

Здесь, как принято, предполагается суммирование одночленов по индексам, встречающимся дважды на разных уровнях: $i = 1, 2, 3$. Если существует аффинное преобразование, отображающее линию γ в себя, то можно перейти к новому параметру p для $f(\gamma)$, положив:

$$a_{ji}t^i + b_j = p^j, \quad j = 1, 2, 3.$$

В результате получаем 2 тождества:

$$a_{2i}t^i + b_2 = (a_{1i}t^i + b_1)^2\,, \qquad a_{3i}t^i + b_3 = (a_{1i}t^i + b_1)^3\,.$$

Распишем подробно первое тождество:

$$a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3 + b_2 = {a_{11}}^2t^2 + 2a_{11}a_{12}t^3 + 2a_{11}a_{13}t^4 + {a_{12}}^2t^4 + 2a_{12}a_{13}t^5 + {a_{13}}^2t^6 + {b_1}^2 + 2a_{11}b_1t + 2a_{12}b_1t^2 + 2a_{13}b_1t^3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим:

$$\begin{cases} b_2 = {b_1}^2 \\ a_{21} = 2a_{11}b_1 \\ a_{22} = 2a_{12}b_1 + {a_{11}}^2 \\ a_{23} = 2a_{11}a_{12} + 2a_{13}b_1 \\ 0 = 2a_{11}a_{13} + {a_{12}}^2 \\ 0 = 2a_{12}a_{13} \\ 0 = {a_{13}}^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{12} = 0 \\ a_{23} = 0 \\ a_{22} = {a_{11}}^2 \\ a_{21} = 2a_{11}b_1 \\ b_2 = {b_1}^2 \end{cases}.$$

С учётом найденных коэффициентов второе тождество примет вид

$$a_{31}t + a_{32}t^2 + a_{33}t^3 + b_3 = (a_{11}t + b_1)^3$$

или

$$a_{31}t + a_{32}t^2 + a_{33}t^3 + b_3 = {a_{11}}^3t^3 + 3{a_{11}}^2b_1t^2 + 3a_{11}{b_1}^2t + {b_1}^3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим:

$$\begin{cases} a_{31} = 3a_{11}{b_1}^2 \\ a_{32} = 3{a_{11}}^2b_1 \\ a_{33} = {a_{11}}^3 \\ b_3 = {b_1}^3 \end{cases}.$$

Итак, формулы аффинного преобразования, отображающего линию γ в себя, после обозначения $a_{11} = a,\ b_1 = b$ примут вид:

$$\begin{cases} \overline{x_1} = ax_1 + b \\ \overline{x_2} = 2abx_1 + a^2x_2 + b^2 \\ \overline{x_3} = 3ab^2x_1 + 3a^2bx_2 + a^3x_3 + b^3 \end{cases}.$$

Можно предположить, что аффинное преобразование, отображающее линию $\gamma \subset A^n$ с параметризацией $\vec{r} = (t, t^2, t^3, \dots, t^i, \dots, t^n)$, $t \in R$, в себя, имеет вид

$$\overline{x_i} = \sum_{k=1}^{i} C_i^k\, b^{i-k}a^kx_k + b^i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

здесь C_i^k – биномиальные коэффициенты.

Убедимся, что это действительно так. Образ линии γ при таком преобразовании задаётся формулами:

$$x_i = \sum_{k=1}^{i} C_i^k\, b^{i-k}a^kt^k + b^i$$

или

$$x_i = \sum_{k=0}^{i} C_i^k\, b^{i-k}(at)^k,$$

или

$$x_i = (at + b)^i, \text{ где } i = 1, 2, \dots, n.$$

Вводя новый параметр $p = at + b$, получим уравнения линии $f(\gamma)$:

$$x_i = p^i, \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно $f(\gamma) = \gamma$.

Заметим, что данное семейство аффинных преобразований – двухпараметрическое, зависящее от параметров a и b. Задав произвольно первые координаты x_0, x_1, $\widetilde{x_0}$, $\widetilde{x_1}$, четырёх точек M_0, M_1, $\widetilde{M}_0$, $\widetilde{M}_1$ линии γ, мы определим параметры a и b аффинного преобразования, отображающего точки M_0, M_1 соответственно в точки $\widetilde{M}_0$, $\widetilde{M}_1$, из системы:

$$\begin{cases} \widetilde{x_0} = ax_0 + b \\ \widetilde{x_1} = ax_1 + b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\widetilde{x_1} - \widetilde{x_0}}{x_1 - x_0} \\ b = \dfrac{\widetilde{x_0}x_1 - \widetilde{x_1}x_0}{x_1 - x_0} \end{cases}.$$

Так как аффинное преобразование непрерывно, то связное множество – дугу M_0M_1 линии γ – оно отображает в связное множество – дугу $\widetilde{M_0}\widetilde{M_1}$ этой же линии. Теорема доказана.

Следствие 1. *Линия δ в A^n, задаваемая параметризацией*
$\vec{r} = (a_{1i}t^i + b_1,\ \ a_{2i}t^i + b_2,\ \ \dots, a_{ni}t^i + b_n),\ t \in R,$ *где* $\det|a_{ji}| \neq 0$, *обладает свойством аффинной эквивалентности дуг.*

Доказательство основано на очевидном факте, что линия, афинно-эквивалентная линии с аффинно-эквивалентными дугами, сама обладает указанным свойством. Линия же δ получена из линии γ с параметризацией $\vec{r} = (t,\ t^2,\ t^3, \dots, t^i, \dots, t^n)$, $t \in R$, в результате аффинного преобразования.

Следствие 2. Линия $\bar{\gamma}$ *в A^n, задаваемая в некоторой аффинной системе координат параметризацией $\vec{r} = (t,\ t^2,\ t^3, \dots,\ t^k, 0 \dots,\ 0),\ t \in R$, обладает свойством аффинной эквивалентности дуг.*

Доказательство. Действительно, аффинные преобразования

$$\overline{x_i} = \sum_{k=1}^{i} C_i^k\, b^{i-k} a^k x_k + b^i, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$
$$\overline{x_i} = x_i,\ i = k+1, \dots, n,$$

отображают линию $\bar{\gamma}$ в себя. Параметры a и b аффинного преобразования, отображающего дугу M_0M_1 линии $\bar{\gamma}$ в дугу $\widetilde{M_0}\widetilde{M_1}$ этой же линии, определяются как в теореме 1.

Теорема 2. *Пусть β – произвольная выборка из множества индексов $\{1,\ 2, \dots,\ n\}$ объёма меньше n. Тогда проекция γ_β линии γ:*
$\vec{r} = (t,\ t^2,\ t^3, \dots, t^i, \dots, t^n)$, $t \in R$, *на плоскость $x_i = 0$, $i \in \beta$, обладает свойством: для любой дуги M_0M_1 и произвольной точки $\widetilde{M_0}$ линии существует точка $\widetilde{M_1}$ этой же линии такая, что дуги M_0M_1 и $\widetilde{M_0}\widetilde{M_1}$ аффинно-эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\overline{\beta}$ – дополнение выборки в множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Тогда γ_β : $x_i = t^i$ при $i \in \overline{\beta}$ и $x_i = 0$ при $i \in \beta$. Аффинное преобразование $\overline{x_i} = a^i x_i$ (нет суммирования по i), $i = 1, 2, \dots, n$, где $a \neq 0$, отображает линию γ_β в линию: $x_i = (at)^i$ при $i \in \overline{\beta}$ и $x_i = 0$ при $i \in \beta$, т. е. саму в себя. Поэтому, задав первые из ненулевых координат x_{0j}, x_{1j}, $\widetilde{x_{0j}}$ трёх точек M_0, M_1, $\widetilde{M_0}$ линии γ_β, найдём соответствующую координату $\widetilde{x_{1j}}$ точки $\widetilde{M_1} \in \gamma_\beta$ такой, что дуга M_0M_1 указанным преобразованием отображается в дугу $\widetilde{M_0}\widetilde{M_1}$, а также параметр a этого преобразования из равенств $\widetilde{x_{0j}} = a^j x_{0j}$, $\widetilde{x_{1j}} = a^j x_{1j}$. Таким образом, $a^j = \frac{\widetilde{x_0}}{x_0}$, $\widetilde{x_{1j}} = \frac{\widetilde{x_0}}{x_0} x_{1j}$. Теорема доказана.

Замечание. Аффинных преобразований, отображающих дугу M_0M_1 в дугу $\widetilde{M_0}\widetilde{M_1}$ этой же линии, бесконечно много: например, можно положить $\overline{x_i} = a^i x_i$ при $i \in \overline{\beta}$ и $\overline{x_i} = c_i x_i$ при $i \in \beta$, где $c_i \neq 0$ при $i \in \beta$ и $a \neq 0$.

Библиографический список

1. Поликанова И.В. Об аффинной эквивалентности параболических дуг // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования : сборник научных статей международной конференции, Барнаул, 11-14 ноября, 2014. – Барнаул, 2014. – С. 344-346.

УДК 514.765

Конформные деформации солитонов Риччи

Е.Д.Родионов

(АлтГУ, г. Барнаул).

В последнее время активно исследуются солитоны Риччи, т.е. римановы многообразия (M,g), удовлетворяющие дифференциальному уравнению:

$$r(g) = \Lambda g + L_X(g),$$

где $r(g)$ – тензор Риччи метрики g, Λ – вещественная константа, $L_X(g)$ – производная Ли метрики g в направлении полного векторного поля X. Заметим, что в случае, когда $L_X(g)=0$, мы имеем обычное уравнение Эйнштейна для римановых многообразий, а соответствующие солитоны называются тривиальными. Таким образом, солитоны Риччи представляют собой естественное обобщение римановых многообразий с метрикой Эйнштейна, а теория солитонов является обобщением теории римановых многообразий с метрикой Эйнштейна. Многообразия Эйнштейна и методы их построения хорошо исследованы (см., например, обзоры [1], [2]). В частности, один из способов построения новых метрик Эйнштейна состоит в деформации исходной римановой метрики. Одной из таких деформаций является конформная деформация: $g^1 = e^{2f}g$, где $f=f(x)$ – гладкая функция на многообразии M. При такой деформации тензор Риччи и производная Ли изменяются по формулам:

$$r^1 = r - (n-2)(Ddf - df \circ df) + (\Delta f - (n-2)\,|df|^2)g;$$

$$L_X(e^{2f}g) = \langle X, grad\, e^{2f} \rangle g + e^{2f} L_X(g),$$

где Df – градиент, Δf – лапласиан, а Ddf – гессиан функции f относительно метрики g. Понятно поэтому, что появляется возможность