Замечание. $\arcsin\frac{\sqrt{73}-1}{6\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}$ соответствует примерно $17^{\circ}45'$.

Утверждение 6. Для прямоугольного треугольника единичной площади, ориентированная площадь треугольника замечательных точек принимает значения в интервале $\left(-\frac{1}{12},\frac{1}{12}\right)$.

Библиографический список

1. Саженков А.Н. Площадь треугольника замечательных точек // Ломоносовские чтения на Алтае : сборник научных статей международной молодежной школы-семинара. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2013. – Ч. III. – 416 с.

УДК 514.75

К геометрии листа Мебиуса в E^4

М.А. Чешкова
АлтГУ, г. Барнаул

В евклидовом пространстве E^4 рассматривается лист Мебиуса

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. В [3] указано разрезание бутылки Клейна в E^3 на два листа Мебиуса.

В евклидовом пространстве E^4 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную с помощью 4π – периодической вектор - функцией $\rho=\rho(v)$.

Тогда функция $s(v)=\frac{1}{2}(\rho(v)+\rho(v+2\pi))$ есть $2\pi-$ периодическая, а вектор – функция $l(v)=\frac{1}{2}(\rho(v)-\rho(v-2\pi))$ есть 2π - антипериодическая.

Рассмотрим линейчатую поверхность M : $r(u,v)=s(v)+ul(v)$, $u\in[-1,\dots 1], v=[-\pi,\pi]$. Имеем гомеоморфизм прямоугольника

$[-1,1]\times[-\pi,\pi]$ в E^4, причем точки с координатами $(-u,-\pi),(u,\pi)$ «совпадают». Поверхность M есть модель листа Мебиуса [4].

Вектор-функция $r=r(u,v)$ определяет одностороннюю поверхность – лист Мебиуса, для которого $s=s(v)$ – средняя линия, а $\rho=\rho(v)=r(1,v)$ – край.

Рассмотрим тор Клиффорда $r(u,v)=(\cos(u),\sin(u),\cos(v),\sin(v))$ и кривую на нем $\rho=(\cos(\frac{v}{2}),\sin(\frac{v}{2}),\cos(v),\sin(v))$. Тогда

$$s(v)=(0,0,\cos(v),\sin(v)),l(v)=(\cos(\frac{v}{2}),\sin(\frac{v}{2}),0,0).$$

Исследуем лист Мебиуса M :

$r(u,v)=s(v)+ul(v)$, $u\in[-1,1],v\in[0,2\pi]$.

Имеем

$$r_1=r_u=l(v),r_2=r_v=s'(v)+ul'(v),|r_1|=1,|r_2|=\frac{1}{2}\sqrt{4+u^2}.$$

Касательное пространство примет вид:

$T_pM=\{l(v),s'(v)+ul'(v),p\in M$

Рассмотрим два единичных нормальных вектора в нормальном пространстве в точках поверхности M.

$$n_1=\frac{1}{\sqrt{u^2+4}}(us'(v)-4l'(v)),n_2=s(v)$$

Пусть $t=t^ir_i\in T_pM$, $p\in M$ – касательный вектор, длина которого равна единице. Рассмотрим вектор нормальной кривизны $b=b(t,t)$, где $b(t,t)$ – вторая фундаментальная форма поверхности M. Зафиксируем точку p, а вектор t будем менять. Концы вектора нормальной кривизны с началом в точке p опишут в $T_pM^{\perp}$ кривую, которая называется индикатрисой нормальной кривизны [5]. Индикатриса нормальной кривизны есть эллипс либо отрезок прямой. Определим ее.

Имеем:

$$t=\cos(\beta)\frac{r_1}{|r_1|}+\sin(\beta)\frac{r_2}{|r_2|}.$$

$$b(t,t) = (\cos(\beta)^2 b^1_{11} + 2\sin(\beta)\cos(\beta) b^1_{12} \frac{2}{\sqrt{u^2+4}}$$

$$+\sin(\beta)^2 b^1_{22} \frac{4}{u^2+4}) n_1 +$$

$$(\cos(\beta)^2 b^2_{11} + 2\sin(\beta)\cos(\beta) b^2_{12} \frac{2}{\sqrt{u^2+4}} +$$

$$\sin(\beta)^2 b^2_{22} \frac{4}{u^2+4}) n_2,$$

$$b^k_{ij} = (r_{ij}, n_k), b^1_{11} = 0, b^2_{11} = 0, b^1_{12} = -\frac{1}{\sqrt{u^2+4}},$$

$$b^2_{12} = 0, b^1_{22} = 0, b^2_{22} = -1.$$

Переходя к двойному углу, получим

$$b(t,t) = -\frac{2\sin(2\beta)}{u^2+4} n_1 - \frac{2(1-\cos(2\beta))}{u^2+4} n_2,$$

или

$$(b^1)^2 + (b^2 + \frac{2}{u^2+4})^2 = \frac{4}{(u^2+4)^2}, b = (b^1, b^2)$$

.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Индикатриса нормальной кривизны в любой точке листа Мебиуса есть окружность, проходящая через эту точку, причем, наибольший радиус имеют окружности вдоль линии* $s = s(v)$.

Определим метрический тензор g_{ij} и скалярную кривизну K поверхности M .

Имеем $g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = \frac{u^2+4}{4}, K = \frac{-8}{(u^2+4)^2}$

Теорема 2. *Скалярная кривизна* K *листа Мебиуса вдоль кривых* $u = const$ *постоянная. В точках кривой* $s = s(v)$ *она наименьшая и равна* $-\frac{1}{2}$. *Скалярная кривизна листа Мебиуса* K *и радиус* R *окружности индикатрисы нормальной кривизны удовлетворяют соотношению* $K + 2R^2 = 0$.

Построим индикатрису листа Мебиуса при $u = 0$ (рис. 1) и график функции $K = K(u,v)$ (рис. 2).

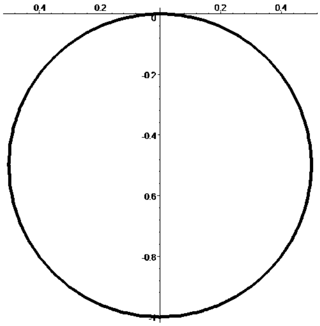

Рис.1. Индикатриса листа Мебиуса при $u = 0$.

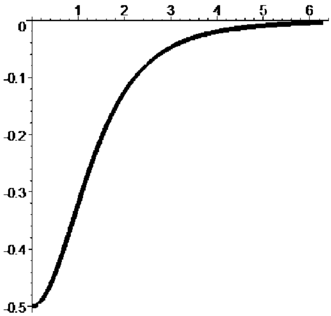

Рис. 2. Кривизна листа Мебиуса

Библиографический список

1. Mashke H. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos. 1:1(1900).

2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. – 2007. – Т. 71, №5. – С. 197-224.

3. Чешкова М.А.О бутылке Клейна // Известия Алтайского университета. – Барнаул, 2012. – №1/1. – С. 130-133.

4. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. – М., 1995.

5. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. – М., МГУ, 1960.