2. Ведерников В.В., Николаевский В.Н. Уравнения механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // Изв. АН СССР. - Механика жидкости и газа. – 1978. – Т. 5.

3. Гоман В.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Численное решение двумерной задачи движения воды и воздуха в тающем снеге // Известия Алтайского университета. - Барнаул, 2014. – №1/2. – С. 15-20.

4. Папин А.А. Краевые задачи для уравнений двухфазной фильтрации. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2009.

УДК 513.2:57.017.64

Об одной нелинейной динамической системе

Н.Б. Аюпова, В.П. Голубятников
ИМ СО РАН, НГУ, г. Новосибирск

В работе [1] изучалась одна модель взаимодействия двух соседних идентичных клеток в имагинальном диске *D.melanogaster* на ранней стадии его развития. Здесь мы изучаем несколько более сложную ситуацию: пусть K_1, K_2, K_3 – три соседние клетки в таком диске, и в каждой из них содержатся белки AS-C, Delta и Notch. В дальнейшем все индексы j, k, m предполагаются равными 1 или 2 или 3, и $j \neq k \neq m \neq j$. Обозначим через x_j, y_j, z_j, соответственно, концентрации этих белков в клетке K_j и выпишем, следуя [3-5], систему кинетических уравнений, описывающую их взаимодействие:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(z_1) - x_1;\ \frac{dy_1}{dt} = \sigma_1(x_1) - y_1;\ \frac{dz_1}{dt} = \varsigma_{2,1}(y_2) + \varsigma_{3,1}(y_3) - z_1;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(z_2) - x_2;\ \frac{dy_2}{dt} = \sigma_2(x_2) - y_2;\ \frac{dz_2}{dt} = \varsigma_{1,2}(y_2) + \varsigma_{3,2}(y_3) - z_2; \quad (1)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(z_3) - x_3;\ \frac{dy_3}{dt} = \sigma_3(x_3) - y_3;\ \frac{dz_3}{dt} = \varsigma_{1,3}(y_1) + \varsigma_{2,3}(y_2) - z_3.$$

Все переменные и функции неотрицательны, функции f_j монотонно убывают, что описывает отрицательную обратную связь *(Notch)$_j$* ◄ *(AS-C)$_j$*. Функции σ_j и $\zeta_{k,m}$ монотонно возрастают, описывая положительные обратные связи внутри клеток: *(AS-C)$_j$→(Delta)$_j$*, и между клетками: *(Delta)$_k$→(Notch)$_j$←(Delta)$_m$*, см. [1]. На ранней стадии развития все клетки одинаковы, поэтому при всех $k \neq m$

$$\varsigma_{k,m} = \varsigma(y) = \frac{Cy}{c+y},$$
$$f_1 = f_2 = f_3 = f(z) = \frac{A}{a+z^2}; \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma(x) = \frac{Bx^2}{b+x^2}. \tag{2}$$

Пусть $g(z) = \varsigma(\sigma(f(z))) = \frac{A^2BC}{c[A^2 + b(a+z^2)^2] + A^2B}$. Стационарные точки системы (1), (2) находятся из системы девяти уравнений $x_j = f(z_j)$; $y_j = \sigma(x_j)$; $z_j = \varsigma(y_k) + \varsigma(y_m)$, что сводится к:

$$z_1 + g(z_1) = z_2 + g(z_2) = z_3 + g(z_3) = g(z_1) + g(z_2) + g(z_3). \tag{3}$$

Система (3) имеет в точности одно симметричное решение $z_0 := z_1 = z_2 = z_3$, получаемое из уравнения $z_0 = 2g(z_0)$.

«Частично симметричные» решения системы (3) $z_1 = z_2$, или $z_3 = z_2$, или $z_1 = z_3$ находятся из уравнений вида $z_1 = g(z_1) + g(z_3)$; $z_3 = 2g(z_1)$, и в этом случае две клетки из K_1, K_2, K_3 находятся в одинаковом состоянии, определяемом уравнением $z_1 = g(z_1) + g(2g(z_1))$. При достаточно больших значениях A, B и C эта система имеет три решения. Обозначим их в порядке возрастания следующим образом: $z_1 = z_1^-$; $z_1 = z_1^0$ и $z_1 = z_1^+$, см. рисунок 1, построенный при A=4; a=0,3; B=8; b=28,8; C=54; c=1. Решение $z_1 = z_1^0$ соответствует полностью симметричному случаю $z_1 = z_2 = z_3$. Линеаризация системы (1), (2) в окрестности ее стационарной точки $S = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$ описывается блочной 9×9 матрицей M, имеющей вид

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & A_2 & B_3 \\ B_1 & B_2 & A_3 \end{pmatrix}, \text{ где } A_j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -p_j \\ q_j & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $-p_j = \dfrac{d f(z_j)}{d z_j}$; $q_j = \dfrac{d\sigma(x_j)}{d x_j}$; $r_j = \dfrac{d\varsigma(y_k)}{d y_k}$. Обозначим через Π_j произведение $p_j q_j r_j$, вычисленное в этой точке. Характеристический многочлен матрицы M принимает вид

$$(1+\lambda)^9 - (1+\lambda)^3(\Pi_1\Pi_2 + \Pi_3\Pi_2 + \Pi_1\Pi_3) + 2\Pi_1\Pi_2\Pi_3 = 0. \qquad (4)$$

В симметричном случае $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = a_0^3 > 0$ уравнение (4) имеет два набора кратных корней, удовлетворяющих условию $(1+\lambda)^3 = a_0^3$, и три корня, определяемых из $(1+\lambda)^3 = -2a_0^3$. При больших значениях A, B и C два собственных числа положительны, это кратный корень $\lambda_{1,2} = a_0 - 1$. У остальных собственных чисел $\operatorname{Re}\lambda_n < 0$. И для частично симметричной стационарной точки уравнение (4) решается явно: пусть, например, $z_1 = z_2$. Тогда $\Pi_1 = \Pi_2 > 0$, $\Pi_3 > 0$, и $(1+\lambda)^3 = \Pi_1$.

Оставшиеся характеристические числа в такой точке находятся из уравнения $(1+\lambda)^6 + (1+\lambda)^3\Pi_1 - 2\Pi_1\Pi_3 = 0$. При больших A, B и C для решения $z_1 = z_1^+$, $z_3 = z_1^-$ вещественные части собственных чисел матрицы M отрицательны, в этом случае из клеток K_1, K_2, K_3 родительской клеткой становится K_3, ср. [1]. Случай $z_1 = z_2 = z_1^-$, $z_3 = z_1^+$ соответствует неустойчивой стационарной точке.

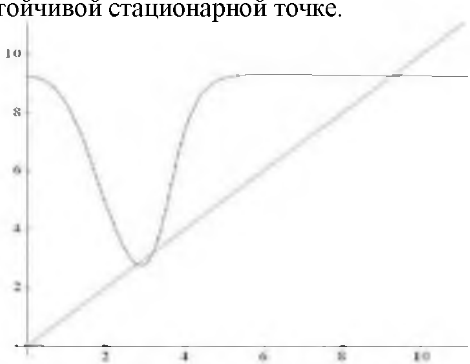

Рис. 1. График функции g(z) + g(2g(z))

Ввиду симметричности динамической системы (1), (2), задаваемая соотношениями $X := x_1 = x_2 = x_3$; $Y := y_1 = y_2 = y_3$; $Z := z_1 = z_2 = z_3$ трехмерная плоская область $P_+^3 \subset R^9$ инвариантна относительно траекторий этой системы, ограничение которой на P_+^3 имеет вид

$$\frac{dX}{dt}=f(Z)-X;\ \frac{dY}{dt}=\sigma(X)-Y;\ \frac{dZ}{dt}=2\varsigma(Y)\cdot \qquad (5)$$

Эта система имеет всего одну стационарную точку $S_0(X_0,Y_0,Z_0)$, соответствующая случаю $\Pi_1=\Pi_2=\Pi_3=a_0^3>0$, см. выше. Разобьем область P_+^3 плоскостями $X=X_0$, $Y=Y_0$, $Z=Z_0$ и перенумеруем полученные 8 областей (блоков) булевыми индексами $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$: $\varepsilon_1=0$, если $0<X<X_0$; $\varepsilon_1=1$, если $X_0\le X$; $\varepsilon_2=0$, если $0<Y<Y_0$ и т.д., см. [4]. Линеаризация системы (5) в S_0 описывается матрицей

$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -p\\ q & -1 & 0\\ 0 & 2r & -1\end{pmatrix}$, у которой одно собственное число отрицательно: $\mu_1=-1-a_0\sqrt[3]{2}$, и два комплексных: $\mathrm{Re}\,\mu_{2,3}=\dfrac{a_0\sqrt[3]{2}-2}{2}$. Как следует из [2,4], если $a_0\sqrt[3]{2}>2$, то система (5) имеет в области P_+^3 цикл, который переходит из блока в блок, согласно диаграмме:

$$\ldots\to\{0,0,0\}\to\{1,0,0\}\to\{1,1,0\}\to\{1,1,1\}\to\{0,1,1\}\to\{0,0,1\}\to\{0,0,0\}\to\ldots$$

В системе (1), (2) такой цикл неустойчив. При сдвиге любой его точки вдоль собственных векторов матрицы M, соответствующих ее положительным собственным значениям $\lambda_1=\lambda_2$, мы попадаем в точку, у которой траектория притягивается к одной из устойчивых частично симметричных стационарных точек, описанных выше.

Работа поддержана РФФИ, грант 15-01-00745.

Библиографический список

1. Акиньшин А.А., Бухарина Т.А., Голубятников В.П., Фурман В.П. Математическое моделирование взаимодействия двух клеток в пронейральном кластере крылового имагинального диска D.mealnogaster // Вестник НГУ. – 2014. – Т. 14, №4. – С. 3–10.

2. Glass L., Pasternack J. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // J. Math. Biology. – 1978. – V. 6. – P. 207–223.

3. Golubyatnikov V.P., Golubyatnikov I.V., Likhoshvai V.A. On the existence and stability of cycles in five-dimensional models of gene networks // Numerical analysis and applications. – 2010. – V. 3, № 4. – P. 329 – 335.

4. Golubyatnikov V.P., Golubyatnikov I.V. On periodic trajectories in odd-dimensional gene networks models // Russian journal of numerical analysis and mathematical modeling. – 2011. V. 28, №4. – P. 397–412.

5. Murray J.D. Mathematical biology. I. An introduction. 2002. NY: Springer-Verlag.

УДК 536.25

Моделирование стационарных двухслойных течений жидкости и газа с испарением на границе раздела

О.Н. Гончарова, Е.В. Резанова
АлтГУ, г. Барнаул

Конвективные течения жидкости и газа часто сопровождаются тепло- и массопереносом через термокапиллярную границу раздела. Изучению подобных процессов посвящено большое количество работ (см. [1-3] и цитированную там литературу).

В данной работе исследуются стационарные двухслойные течения в горизонтальном канале с твердыми непроницаемыми стенками. Система «жидкость–газ» находится под действием продольных градиентов температуры и поперечного поля силы тяжести. В верхнем газопаровом слое принимается во внимание действие эффектов Соре (термодиффузии) и Дюфура (диффузионной теплопроводности) [4-7]. Математическое моделирование течений жидкости проводится на основе системы уравнений Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска [4]. Для описания процессов в верхнем слое система уравнений должна быть дополнена уравнением диффузии. Функции скорости, распределения температуры в канале и давления, а также концентрации пара в газовом слое строятся на основе точных решений типа Бириха [8] и имеют следующий вид [2, 9, 10]:

$$u_i = \frac{y^4}{24}L_4^i + \frac{y^3}{6}L_3^i + \frac{y^2}{2}c_1^i + yc_2^i + c_3^i,$$