channel // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2014. – Vol. 68. – P. 527-541.

6. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Построение математической модели течений в тонком слое жидкости на основе классических уравнений конвекции и обобщенных условий на границе раздела // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – №85 (1/1). – С. 70-74.

7. Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Тарасов Я.А. Математическое моделирование термокапиллярных течений в тонком слое жидкости с учетом испарения // Известия Алтайского государственного университета. – 2014. – №81 (1/1). – С. 47-52.

8. Андреев В.К., Гапоненко Ю.В., Гончарова О.Н., Пухначёв В.В. Современные математические модели конвекции. – М.: Физматлит. – 2008. – 368 с.

9. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе раздела // Известия Алтайского государственного университета. – 2012. – №73 (1/2). – С. 12-18.

УДК 517.95 + 556.342.2 + 539.217

Об одной модели двухфазной фильтрации в пороупругой среде

А.А. Папин, Ю.Ю. Подладчиков

АлтГУ г. Барнаул, университет Лозанны

Рассматривается изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в деформируемой пористой среде. Уравнения сохранения массы для каждой из жидкостей и пористой среды, законы Дарси и Лапласа для жидкостей, а также реологическое соотношение для пористости имеют вид [1, 2]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_i^0 s_i)+\nabla\cdot(\phi\rho_i^0 s_i\vec{u}_i)=0,\quad i=1,2,\quad \frac{\partial}{\partial t}((1-\phi)\rho_3^0)+\nabla\cdot((1-\phi)\rho_3^0\vec{u}_3)=0,$$

$$s_i\phi(\vec{u}_i-\vec{u}_3)=-K_0\frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}(\nabla p_i+\rho_i^0\vec{g}),\quad p_2-p_1=p_c(x,s_1),\quad s_1+s_2=1,$$

$$\nabla\cdot\vec{u}_3=-\frac{1}{\xi(\phi)}p_e-\beta_t(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t}+\vec{u}_3\cdot\nabla p_e),$$

$$\nabla p_{tot}=\rho_{tot}\vec{g},\quad p_e=p_{tot}-p_f,\quad p_f=s_1p_1+s_2p_2,$$

$$p_{tot}=\phi p_f+(1-\phi)p_s,\quad \rho_{tot}=\phi\rho_f+(1-\phi)\rho_3^0,\quad \rho_f=\phi(s_1\rho_1^0+s_2\rho_2^0).$$

Здесь ϕ – пористость $\vec{u}_i$ – скорость i – ой фазы ($i=1,2,3$), s_i и p_i – насыщенность и давление жидкой фазы ($i=1,2$), p_s – давление твердой фазы, p_e – эффективное давление.

Заданные функции: ρ_i^0 – истинные плотности ($i=1,2,3$), K_0 – тензор фильтрации, $\overline{k_{0i}}$ – относительные фазовые проницаемости, μ_i – вязкости жидкостей, $p_c(x,s_1)$ – капиллярный скачок давлений, $\xi(\phi)$ и $\beta_t(\phi)$ – коэффициенты объемной вязкости и объемной сжимаемости горной породы, $\vec{g}$ – ускорение силы тяжести. Условие $\rho_i^0=const$ $(i=1,2,3)$ приводит к замкнутой системе уравнений для $\phi,\vec{u}_i,p_i,p_s$. В случае $\phi=\phi(x)$ сформулированная система уравнений есть модель Маскета-Леверетта [3–8].

В [9] дается постановка задачи и проводится преобразование трехмерной системы уравнений, записанной в переменных Эйлера. В результате возникает система составного типа, содержащая, как в классической модели Маскета-Леверетта, вырождающиеся на решении уравнения. Для скорости твердой фазы возникает условие совместности.

В одномерном случае исходная система система принимает вид

$$\frac{\partial\phi s_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\phi s_i u_i)=0,\quad i=1,2,\tag{1}$$

$$s_i\phi(u_i-u_3)=-K_0\frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}(\frac{\partial p_i}{\partial x}-\rho_i^0 g),\quad i=1,2,\tag{2}$$

$$s_1+s_2=1,\quad p_2-p_1=p_c(x,s),\quad s=\frac{s_1-s_1^0}{1-s_1^0-s_2^0}\in[0,1],\tag{3}$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)u_3)=0,\tag{4}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}=-a_1(\phi)p_e-a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t}+u_3\frac{\partial p_e}{\partial x}),\tag{5}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}=-\rho_{tot}g.\tag{6}$$

Здесь (x,t) – переменные Эйлера, $a_1(\phi)=\dfrac{1}{\xi(\phi)}$, $a_2(\phi)=\beta_t(\phi)$.

Пусть $y=y(\zeta,x,t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta}=u_3(y,\zeta),\quad y|_{\zeta=t}=x. \tag{7}$$

Положим $\xi=y(\zeta,x,t)|_{\zeta=0}$ и возьмем за новые переменные ξ и t. Тогда $1-\phi(\xi,t)=(1-\phi^0(\xi))J(\xi,t)$, где $J(\xi,t)=\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ – якобиан перехода. Система уравнений в новых переменных может быть приведена к виду

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}s_1)-\frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)K_0 a(s)\frac{\partial s}{\partial x}+\\ &+(1-\phi)K_1\frac{\partial p}{\partial x}+f_0)=0,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi})-\frac{\partial}{\partial x}(K(1-\phi)\frac{\partial p}{\partial x}+f)=0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{(1-\phi)}\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}=a_1(\phi)p_e+a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \tag{10}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}=-\rho_{tot}g, \tag{11}$$

где

$$a(s)=-\frac{k_{01}k_{02}}{k}\frac{\partial p_c}{\partial s}\geq 0, k_{0i}=\frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}, k=k_{01}+k_{02},\quad a(0)=a(1)=0,$$

$$K_1=K_0k_{01},\quad f_0=-K_1\rho_1^0 g,$$

$$p=p_1-\int_s^1\frac{k_{02}}{k}\frac{\partial p_c}{\partial \xi}d\xi,\quad K=K_0k,$$

$$f=-K_0g(k_{01}\rho_1^0+k_{02}\rho_2^0).$$

Скорость u_3 явно не входит в систему (8)–(11). С учетом связи функций p_{tot} и p_e, четыре уравнения системы служат для нахождения s, p, ϕ, p_s. Затем из уравнения неразрывности твердой фазы находим u_3. Наконец из (7) восстанавливаем переменные Эйлера.

В докладе излагаются результаты о разрешимости начально-краевых задач для уравнений двухфазной фильтрации в пороупругой среде [10–12].

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Минобрнауки РФ № 2014/2, РФФИ (код проекта 13-08-01097).

Библиографический список

1. Бэр Я, Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М., 1971.

2. Connolly J. A. D., Podladchikov Y. Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. – 1998. – Vol. 11. – P. 55-84.

3. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.

4. Антонцев С.Н., Папин А.А. О глобальной гладкости решений уравнений двухфазной фильтрации // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1978. – Вып. 35. – С. 3-28.

5. Антонцев С.Н., Папин А.А. Приближенные методы решения задач двухфазной фильтрации // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 247, № 3. – С. 521-524.

6. Папин А.А. Априорные оценки решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1980. – Вып. 46. – С. 107-121.

7. Папин А.А., Сибин А.Н., Вайгант В.А. Математическая модель неизотермической внутренней эрозии // Известия Алтайского государственного университетаю. – Барнаул, 2015. – Вып. 1/1.– С. 89-103.

8. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое // Известия Алтайского государственного университетаю, Барнаул, 2014. – Вып. 1/2 (81). – С. 41-44.

9. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университетаю. – Барнаул, 2015. – Вып. 1/2 (в печати).

10. Папин А.А., Токарева М.А. Задача о движении сжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде // Известия Алтайского государственного университетаю. – Барнаул, 2011. – Вып. 1/2 (72). – С. 36-43.

11. Папин А.А., Токарева М.А. Динамика тающего деформируемого снежно-ледового покрова // Вестник НГУ. Серия:

Математика, механика, информатика. – 2012. – Т. 12, вып.4. – С. 107-113.

12. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Разрешимость системы уравнений одномерного движения теплопроводной двухфазной смеси // Математические заметки. – 2010. – Т. 87, вып. 2. – С. 246-261.

УДК 532.546+536.415

О точных решениях задачи протаивания грунта под действием инфильтрации осадков

А.Г. Петрова, А.С. Алейников,
Ю.А. Бочкарева, Д.Л. Михина
АлтГУ, г .Барнаул

Работа посвящена построению точных решений с подвижной границей протаивания одномерной задачи тепломассопереноса с фазовым переходом в ненасыщенном грунте. Точные решения строятся в двух вариантах постановки задачи: без учета силы тяжести, и с учетом ее.

Основная модель формулируется в следующих предположениях: вода и лед несжимаемы, воздух – вязкий совершенный газ; температура и давление общие для скелета и пор; поверхность грунта подвержена воздействию выпадающего с определенной скоростью и температурой дождя [1].

Следуя [2], считаем, что область между дневной поверхностью и фронтом протаивания занята грунтом, который рассматривается как пористая среда с неподвижным скелетом и порами, заполненными водой и воздухом. Область перед границей фазового перехода занята мерзлым грунтом, в порах которого находится лед и воздух. Таким образом, в области $0<x<\xi(t)$ инфильтрации осадков выполнены следующие уравнения относительно неизвестных функций S-влагонасыщенности, плотности воздуха в порах ρ_a, температуры T и давления P.

$$n\rho_w \frac{\partial}{\partial t} S_w + \rho_w \frac{\partial}{\partial x}(v_w) = 0, \quad n\frac{\partial}{\partial t}\rho_a(1-S_w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_a v_a) = 0,$$

$$v_j = -\frac{kf_j(S_w)}{\mu_j}P_x \qquad P = \rho_a RT, \qquad j = a, w,$$