силы тяжести и без нее, а также в «однофазном» и «двухфазном» случаях.

Библиографический список

1. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. – М., 1996.
2. Петрова А.Г., Мошкин Н.П., Жирков А.Ф. Задача о возмущениях фазового фронта в ненасыщенном грунте под действием инфильтрации осадков // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2015. – Т. 1, № 1 (85). – С. 100-106.
3. Воеводин А.Ф., Леонтьев Н.А., Петрова А.Г. Термодиффузионная задача о кристаллизации шара // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1982. – № 5. – С. 118.

УДК 551.345 + 539.3

Корректность начально-краевой задачи внутренней эрозии грунта

А.Н. Сибин, В.А. Вайгант
АлтГУ, г. Барнаул, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

В работе изучается следующая система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial s\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(K_0(\phi)a(s)\nabla s - b(s)v(t) + F(s,\phi)), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -I(s,\phi), \qquad (2)$$

решаемая в области $(x,t)\in Q_T = Q\times(0,T)$, $Q=(0,1)$, при краевых и начальных условиях

$$s(0,t)=s_0(t), \quad s(1,t)=s_1(t), \qquad (3)$$

$$s(x,0)=s^0(x), \quad \phi(x,0)=\phi^0(x).$$

Данная начально-краевая задача описывает одномерное движение в неподвижной пористой среде двухфазной смеси, состоящей из твердых частиц и жидкости [1]. Здесь ϕ – пористость, s – насыщенность воды, I – интенсивность перехода массы из твердого скелета; кроме того $K_0(\phi)$, $a(s)$, $b(s)$, $F(s,\phi)$ – заданные функции.

Задача записана в эйлеровых координатах x, t. Искомыми являются величины s и ϕ. Математические модели процесса суффозии изложены, например, в работах [1–2]. Математическое обоснование постановок задач отсутствует, за исключением рассмотрения частных решений [3–6]. Вывод уравнений (1), (2) дан в работе [7]. Система уравнений близка по структуре уравнениям двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей в случае известной пористости [8–10]. Особенностью данной задачи является необходимость обоснования физического принципа максимума для пористости ϕ и насыщенности s вида $0 \le \phi \le 1$, $0 \le s \le 1$. Кроме того коэффициент $a(s)$ в общем случае обладает свойствами $a(0) = a(1) = 0$, $a(s) > 0$ при $s \in (0,1)$, то есть уравнение (1) является вырождающимся на решении, а переменная неизвестная пористость существенно усложняет структуру системы (1), (2). Поэтому на первом этапе исследования задачи (1)–(3) рассматривается случай невырождающегося уравнения (1) ($a(s) > 0$ при $s \in [0,1]$, $0 < \phi < 1$). Целью работы является доказательство классической разрешимости задачи (1)–(3). Ключевым моментом является доказательство гельдеровской непрерывности насыщенности.

Для интенсивности фазовых переходов принимается следующая модельная зависимость [1]: $I = \delta(s) R(\phi) max\{|v(t)| - v_k, 0\}$,

$$\delta(s) = \begin{cases} 0, & s \ge 1; \\ 1 - s, & 0 < s < 1; \\ 1, & s \le 0. \end{cases} \qquad R(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi \ge 1; \\ \phi(1-\phi), & 0 < \phi < 1; \\ 0, & \phi \le 0. \end{cases}$$

где $v(t)$ – суммарная скорость фильтрации (заданная функция), v_k – предельное значение скорости фильтрации при превышении которой "запускается" процесс суффозии.

Определение 1. Классическим решением задачи (1) – (3) в цилиндре Q_T будем называть пару функций $s(x,t)$, $\phi(x,t) \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(Q_T)$, удовлетворяющую уравнениям (1), (2) и условиям (3) как непрерывные функции. Причем $0 \le s \le 1$, $0 < \phi < 1$.

В дальнейшем, будем придерживаясь обозначений принятых в [11, 12].

Теорема. Пусть данные задачи (1) – (3) подчиняются условиям:

1. функции $K_0(\phi)$, $a(s)$, $b(s)$, $F(s,\phi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $s \in [0,1]$, $\phi \in [0,1]$ и удовлетворяют условиям

$$0 < m \le K_0(\phi), \;\; a(s) \le M < \infty,$$

$F(s,\phi) = 0$ при $s < 0$, $s > 1$.

2. функции $v(t)$, $s_0(t)$, $s_1(t)$, $s^0(x)$, $\phi^0(x)$ удовлетворяют следующим условиям гладкости

$$v(t),\;\; s_0(t),\;\; s_1(t) \in C^{2+\alpha}[0,T];\;\; s^0(x),\;\; \phi^0(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{Q})$$

и условиям согласования

$$s_0(0) = s^0(0),\;\; s_1(0) = s^0(1),\;\; s_1(0) = s^0(1),$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$|\, v(t) \,| > v_k,\;\; 0 \le s^0(x) \le 1,\;\; 0 < m_0 \le \phi^0 < M_0 < 1,$$
$$0 \le s_0(t) \le 1,\;\; 0 \le s_1(t) \le 1,$$

где m_0, m, M, v_k, M_0 – известные положительные постоянные.

Тогда для любого конечного интервала $(0,T]$ задача (1) – (3) имеет единственное классическое решение:

$$\phi(x,t),\;\; s(x,t) \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(Q_T).$$

Более того

$$0 \le s(x,t) \le 1,\;\; 0 < \phi(x,t) < 1,\;\; (x,t) \in Q_T.$$

Для классического решения справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть пара (s,ϕ) – решение задачи (1) – (3) и выполнены условия теоремы, тогда $\phi_0 \le \phi < 1$.

Лемма 2. Пусть пара (s,ϕ) – решение задачи (1) – (3), выполнены условия теоремы и $\phi_0 \le \phi < 1$, тогда $0 \le s \le 1$.

Лемма 3. Пусть две пары (s_i,ϕ_i), $i = 1,\;\; 2$, являются классическими решениями задачи (1)–(3) с граничными $s_0^{(i)}$, $s_1^{(i)}$ и начальными s_i^0, ϕ_i^0 условиями соответственно. Пусть

$$\| s_0^1 - s_0^2 \| + \| s_1^1 - s_1^2 \| + \| s_1^0 - s_2^0 \| + \| \phi_1^0 - \phi_2^0 \| = \delta,$$

где $\| \cdot \|$ – норма в L_2. Тогда верна оценка

$$\int\limits_{Q_T} (s^2 + s_x^2 + \phi_t^2 + \phi^2)\, dxdt \le C\delta, \qquad (4)$$

где постоянная C зависит только от m_0, m, M, v_k, M_0.

Замечание 1. Из (4) получим оценку постоянных Гельдера функций $s(x,t)$ и $\phi(x,t)$

$$\| s \|_Q^{(\alpha)} \le C_3(m_0, m, M, v_k),$$

$$\| \phi \|_Q^{(\alpha)} \le C_4(m_0, m, M, v_k).$$

В данной работе доказана глобальная разрешимость начально-краевой задачи для невырожденных уравнений внутренней эрозии грунта. Естественным продолжением работы будет рассмотрение более физичного условия зависимости интенсивности фазового перехода не от сумарной скорости, а от скорости первой фазы. Нелокальная разрешимость близкой по структуре системы рассмотренна в работе [13].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №13-08-01097.

Библиографический список

1. Vardoulakis I. Sand-production and sand internal erosion: Continuum modeling // Alert School: Geomechanical and Structural Issues in Energy Production – 2006.

2. Папин А.А., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Об одной задаче фильтрации в условиях вечной мерзлоты // МАК-2013: сборник трудов шестнадцатой региональной конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013. – С. 45-48.

3. Сибин А.Н. Математическая модель деформации мерзлого грунта вблизи термокарстовых озер // Анализ, геометрия и топология : труды всероссийской молодежной школы-семинара. – Барнаул, 2013. – Ч. 2. – С. 132-142.

4. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное моделирование процесса суффозионного выноса грунта // МАК-2014 : сборник трудов семнадцатой региональной конференции по математике. – Барнаул, 2014. – С. 61-65.

5. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2014. – Вып. 1/2 (81). – С. 41-44.

6. Сибин А.Н. Численное решение двумерной задачи фильтрации с учетом суффозионных процессов // Ломоносовские чтения на Алтае : сборник научных статей международной школы-семинара. – Барнаул : АлтГПА, 2014. – Ч. II., – С. 389 – 393.

7. Папин А.А., Вайгант В.А., Сибин А.Н. Математическая модель изотермической внутренней эрозии // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2015. – Вып. 1/1 (85). – С. 89-93.

8. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.

9. Ахмерова И.Г., Папин А.А. Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной смеси // Математические заметк. – 2014. – Т. 96, № 2. – С. 170-185.

10. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Разрешимость системы уравнений одномерного движения теплопроводной двухфазной смеси // Математические заметки. – 2010. – Т. 87, № 2. – С. 246-261.

11. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

12. Кружков С. Н., Сукорянский С. М. Краевые задачи для систем уравнений типа двухфазной фильтрации; постановка задач, вопросы разрешимости, обоснование приближенных методов // Матем. сб. – 1977. – Т. 104(146), № 1(9). – С. 69–88.

13. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по начальным данным уравнений одномерного движения двух взаимнопронекающих вязких несжимаемых жидкостей // Сб. Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 2000. – Вып. 116. – С. 73-81.

УДК 532.546+517.958

Локализация решения уравнения движения жидкости в деформируемой пористой среде

М.А. Токарева, Ю.Ю. Подладчиков
АлтГУ, г. Барнаул

В работе рассмотрена математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде с преобладанием упругих свойств относительно свойств вязкости и малом коэффициенте объемной сжимаемости твердой среды. Для описания процесса фильтрации жидкости в пороупругой средеиспользуются законы сохранения масс для жидкой и твердой фаз, закон Дарси для жидкости, учитывающий движение скелета, реологический закон типа Максвелла и уравнение сохранения импульса системы в целом. Система уравнений при переходе к переменным Лагранжа сводится к вырождающемуся на решении параболическому уравнению для пористости. Для устанавления свойства конечной скорости стабилизации решения при малом коэффициенте объемной сжимаемости твердой среды используется метод интегральных энергетических оценок [1, 2].

Рассматривается следующая система уравнений [3, 4]