Секция 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ, ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 519

Моделирование случайных процессов

С.М. Аборнев
ИКТ КГБУ ДПО АКИПКРО, г. Барнаул

В докладе рассмотрен численный метод решения математических задач, в которых искомые величины представляются вероятностными характеристиками какого-либо случайного явления. Работа предназначена для учителей информатики и ИКТ, студентов, учащихся старших классов. Все программы реализованы в учебной среде «Исполнители», версия 2.4, исполнитель Kturtle (черепаха). Все дистрибутивы, описание, примерные программы можно найти на сайте К.Ю. Полякова: http://kpolyakov.narod.ru/. Программное обеспечение является свободно распространяемым и может быть использовано без ограничений в некоммерческих целях.

Существует класс задач, для решения которых нужно рассчитать теоретические вероятности каких-либо событий. Часто это бывает очень трудно сделать. В этом случае можно использовать метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Суть метода заключается в моделировании явления (процесса), после чего нужные характеристики приближённо определяются путём статистической обработки «наблюдений» модели. Как известно, результаты большого числа испытаний обладают статистической устойчивостью. Это позволяет решать задачи, подобные приведенным ниже.

Задача 1. Предположим, что производится сборка изделия, состоящего из трех деталей (детали А, В, С). Перед сборщиком находится три ящика – с деталями А, В и С соответственно. Пусть половина деталей каждого типа имеет размеры с положительными отклонениями от номинала, а половина – с отрицательными отклонениями. Изделие ***не может*** нормально функционировать лишь в тех случаях, когда все детали имеют положительное отклонение. Сборщик берет детали из ящика наугад. Вопрос: какова вероятность сборки нормально функционирующего (не бракованного) изделия?

Конечно, этот пример довольно прост. Искомую вероятность легко рассчитать. Вероятность получения бракованного изделия есть вероятность того, что все три детали окажутся с положительными отклонениями. Она равна $\boldsymbol{P_б=1/2*1/2*1/2=1/8}$. Следовательно, вероятность сборки не бракованного изделия $\boldsymbol{P=1-1/8=0,875}$.

Забудем на время, что мы умеем вычислять вероятности, а воспользуемся для решения этой задачи статистическими испытаниями. В качестве таковых надо выбрать испытания, каждое из которых имеет два равновероятных исхода, например, подбрасывание монеты. Возьмем три монеты – А, В и С. Каждая монета ***моделирует*** соответствующую деталь, используемую при сборке изделия. Выпадение герба при подбрасывании монеты будет означать, что соответствующая деталь имеет в данном испытании положительное отклонение, а выпадение «решки» – отрицательное отклонение.

Приступим теперь к статистическим испытанием, каждое из которых состоит в одновременном подбрасывании трех монет. Предположим, что проделано N таких испытаний ($N>>1$) и при этом в $\boldsymbol{n}$ испытаниях выпал герб одновременно у трех монет. Легко сообразить, что отношение $\boldsymbol{(N-n)/N}$ и есть приближенное значение искомой вероятности.

Разумеется, вместо вместо реальных испытаний мы можем использовать компьютерную программу, написанную на одном из языков программирования. Примерная программа для решения данной задачи в среде ***Исполнители*** может выглядеть так:

```
Детали {дробные  p=0, z=0, x=0, y=0;
целые n=10000;  опусти_перо;
повтори ( n )  {x=random; если (x>=0.5) {x=0} иначе {x=1}
y=random;если (y>=0.5) {y=0} иначе {y=1}
z=random; если (z>=0.5) {z=0} иначе {z=1}
z=x+y+z если (z>=1)   {p=p+1}}
p=p/n;вывод "вероятность ";вывод p:5:3;}
```

Результат, получаемый программой, уже для 10000 испытаний хорошо совпадает с теоретическим. На практике в простых ситуациях, подобных описанной выше, никто не прибегает к методу статистических испытаний. Его используют, когда рассчитать искомую вероятность очень трудно или даже вообще невозможно. Рассмотрим теперь более сложный пример статистического моделирования.

Задача 2. Ведется стрельба по мишени. Вероятность попадания в отдельном выстреле известна и равна 0,4. Нам нужно поразить мишень ровно четыре раза. Определить:

1. Среднее количество (математическое ожидание) выстрелов, необходимое для ***четырехкратного*** поражения мишени.

2. Зависимость вероятности четырехкратного поражения мишени от количества выстрелов $P_4(n)$ ***(n=4, 5, …)***.

Каждый выстрел будем моделировать генерацией случайного вещественного числа в интервале от 0 до 1 (монетой здесь уже не обойтись). Причем, если это число окажется в интервале (0 – 0,4), это означает «попадание», а если в интервале (0,4 – 1,0) – «промах». Производим серию «выстрелов» до тех пор, пока мишень не будет поражена 4 раза. Количество выстрелов, понадобившихся для этого в данной серии n_i (например, 11), «запоминаем».

Теперь, чтобы найти теоретическое среднее (матожидание), проведем, к примеру, 10 000 таких серий. Искомое среднее найдем, сложив все значения n_i и поделив на 10 000. Описанный алгоритм легко реализуется в среде ***Исполнители.*** Примерная программа может выглядеть так:

```
Мишени {дробные k=0,z=0,x=0,y=0;
целые n=10000,i=0, a[10000];опусти_перо;
повтори ( n ) {z=0,i=0, пока ( z<4 )
{x=random; i= i+1 если (x<=0.4) {z=z+1}}
a[i]=a[i]+1; k=k+i;} k=k/n; вывод "n="; вывод k;
Линия ( 0,400 ,400 ,400); Линия ( 0,0 ,0 ,400);
цикл ( i=0;i<201 ;i=i+1) {y=a[i]/10; ЛинияК  (i*10,400-y );}
Текст ( 10,20 ,"P" ); Текст ( 380,380 ,"n" );
Линия (80,395,80,405); Линия (60,395,60,405);
Линия (100,395,100,405); Текст (57,410,"6" );
Текст (77,410,"8" );Текст (94,410,"10");}
```

Полужирным шрифтом выделена графическая часть программы. Результат (рис.1) отлично согласуется с теоретическим (N = 10). Попутно мы построили график зависимости вероятности четырехкратного поражения мишени от количества выстрелов. Мы видим, что график имеет максимум в районе ***n = 8 - 9***.

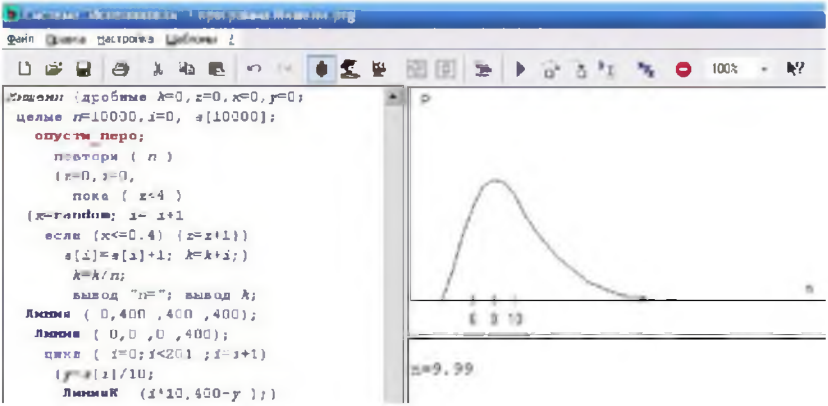

Рис. 1. Вид окна после завершения работы программы

Эти же результаты можно было получить, используя формулы теории вероятности (формула умножения вероятностей, формула Бернулли и т.д.), но в данном случае это был бы гораздо более трудоемкий процесс. Рассмотрим еще один пример, решение которго уже совсем не простое и требует специальных знаний в области математики, так что применение метода Монте-Карло и здесь будет вполне оправдано.

Задача 3. Выполняются одиночные выстрелы по мишени. Вероятность попадания в отдельном выстреле равна 0,5. Мишень считается пораженной, если произведено два попадания ***подряд***. Определите среднее количество (математическое ожидание) выстрелов, необходимое для поражения мишени.

Логика построения модели почти такая же, как в ***Задаче 2***. Моделируем серию «выстрелов» до тех пор, пока не произойдет 2 попадания подряд. Эта серия может состоять из 2, 3, 4… и т.д. выстрелов. Количество выстрелов в данной серии (n_i) «запоминаем». Проведя 10 000 (или больше) таких серий, определим среднее количество выстрелов (матожидание). Попутно можно получить зависимость вероятности поражения мишени от количества выстрелов $P_2(n)$ ($n=2, 3, 4, 5, \ldots$).

Примерная программа, реализующая этот алгоритм в среде ***исполнители***, может выглядеть так:

Два_попадания_подряд
{дробные p=0, z=0, x=0, y=0; целые n=10000,i=0, a[10000];
опусти_перо; повтори (n) {z=0,i=0, пока (z<2)
{x=random; i= i+1 если (x>=0.5) {x=1,z=z+x}
иначе {x=0, z=0} } a[i]=a[i]+1; p=p+i; }p=p/n;
вывод "Матожидание = "; вывод p:3;

```
Линия ( 40,400 ,400 ,400); Линия ( 40,0 ,40 ,400);
цикл ( i=0;i<201 ;i=i+1) {y=a[i]/10; ЛинияК  (i*10+40,400-y );}
Текст ( 25,20 ,"p" );Текст ( 380,410 ,"x" );Текст (57,410,"2" );
Текст (77,410,"4" ); Текст (97,410,"6"); Текст (10,142,"1/4");
Текст (10,267,"1/8"); Линия (60,395,60,405);
Линия (80,395,80,405); Линия (100,395,100,405);
Линия (36,150,44,150); Линия (36,275,44,275);}
```

Полужирным шрифтом выделена графическая часть программы. На рисунке 2 показан вид окна после очередного выполнения программы. Запустив программу несколько раз, мы сможем с уверенностью сказать, что среднее количество выстрелов, необходимое для двух подряд попаданий, равно ***шести***. Это и есть главный результат работы программы. На рисунке также показана зависимость вероятности поражения мишени от количества выстрелов $\boldsymbol{P_2(n)}$.

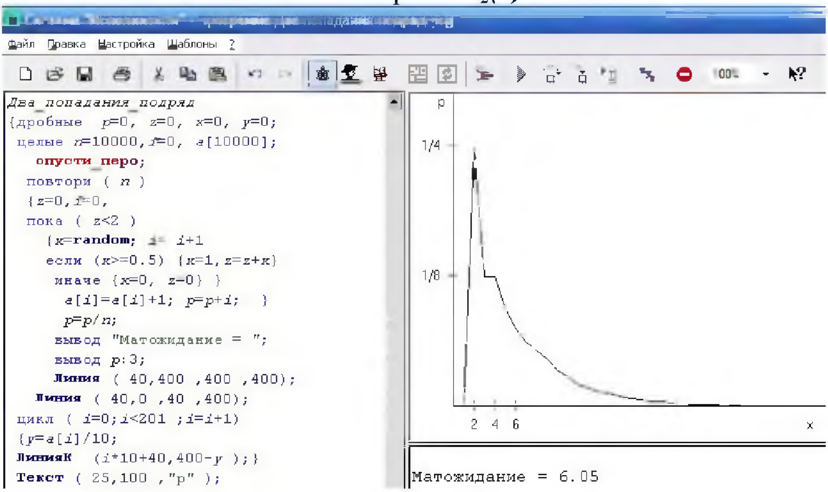

Рис. 2. Вид окна после выполнения программы

Таким образом, используя метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), можно решать вероятностные задачи, которые традиционным способом либо не решаются вовсе, либо их решение представляет собой длительную и трудоемкую процедуру.

Библиографический список

1.Сайт Википедия. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Категория:Метод_Монте-Карло

2. Сайт К.Ю. Полякова. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://kpolyakov.newmail.ru/.

3. Угринович Н.Д. Исследование информационных моделей: учебное пособие. – Москва, Бином. Лаборатория знаний, 2006. – 200 с.

УДК 519.87

Теоретико-игровые модели и механизмы формирования роялти в франчайзинговых сетях

Д.Г. Алгазина, Г.И. Алгазин
АлтГУ, Барнаул

Взаимоотношения в системе франчайзинга достаточно сложны и разнообразны [4, 5, 6 и др.]. Важное место в них отводится платежам роялти.

Основу этих платежей составляет оплата управленческих и прочих услуг франчайзера по текущему содержанию франшизной системы и её развитию. В отличие от первоначального взноса роялти являются текущими платежами, производимые франчайзи на регулярной периодической основе.

Выплата роялти может строиться по следующим схемам:

– отчисления (еженедельные, ежемесячные), размер которых устанавливается фиксированной ставкой процента от объема продаж;

– фиксированная (ежемесячная, годовая) сумма;

– наценка на закупочную стоимость сырья, материалов и комплектующих, поставляемых франчайзером для франчайзи.

Первая схема по праву наиболее распространена. Она отвечает интересам каждой из сторон не только в стабилизации работы франчайзи, но и в расширении его рынка сбыта. Она, что немаловажно, дает возможность франчайзеру оценивать по размерам отчислений объем продаж франчайзи и оперативно реагировать на ситуации, приводящие к увеличению риска неплатежей.

Вторая схема упрощает франчайзеру прогнозирование своих доходов, но не позволяет оценить финансовое положение франчайзи.

Возможность применения третьей схемы предполагает обязательную продажу франчайзером материальных ресурсов франшизному предприятию. Третья схема может комбинироваться с первой или второй. Некоторые франчайзеры используют эту схему как основной источник дохода и взимают очень низкую плату за управленческие услуги как таковые.

Размер регулярных платежей (роялти) определяется рядом факторов, к которым относятся: отрасль бизнеса, месторасположение фран-