точек в пространстве, которые находятся в общем положении (являются вершинами тетраэдра).

Пусть ABCD произвольный тетраэдр в пространстве. Выберем пару противоположных ребер, например, AB и CD. На ребре AB как на стороне построим равносторонний треугольник ABF. Вершина F таких треугольников опишет окружность с центром на стороне AB и радиуса $AB\sqrt{3}/2$. Эта окружность лежит в плоскости перпендикулярной AB и проходящей через ее середину. Точно также на ребре CD как на стороне построим равносторонний треугольник CDG. Вершины G тоже опишут аналогичную окружность. Будем искать точки F и G на этих окружностях, так, чтобы выполнялись следующие условия. Во первых, эти точки должны быть максимально удалены друг от друга, во вторых, отрезок FG должен пересекать отрезки AB и CD. Допустим, что такие точки существуют, тогда описываем окружность около треугольника ABF. Эта окружность пресечет отрезок FG в некоторой точку M, а окружность, описанная около треугольника CDG, пересечет этот отрезок в точке N. Причем точки F, M, N, G расположены в данном порядке на отрезке FG. Тогда отрезки AM, MB, MN, NC и ND образуют искомую сеть Штейнера. Если не удается построить точки M и N удовлетворяющие вышеприведенным условиям, то для данной пары ребер нет сети Штейнера и нужно выбирать другую пару противоположных ребер и повторить процедуру с начала. В случае, когда ни для одной пары ребер не удается построить сеть Штейнера, то тогда искомая кратчайшая сеть состоит из ребер, так называемый евклидов минимальный остов (ЕМОД). Написана программа на Mathematica, которая строит сеть Штейнера для тетраэдра и прямоугольного параллелепипеда.

Кубические параметрические кривые

В.Б. Ким

КемГУ, г. Кемерово

Кубической параметрической кривой называется кривая, заданная параметрическими уравнениями

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3,$$

$$y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3,$$

$$z(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3.$$

Не умаляя общности, можно считать, что параметр t пробегает единичный отрезок. К таким кривым относятся сглаживающие сплайновые кубические кривые: кривые Эрмита, кривые Безье, B-сплайновые кривые. Все эти кривые определяются с помощью некоторого массива точек. При этом в роли функциональных коэффициентов выступают кубические многочлены, образующие базис в пространстве кубических многочленов одной переменной. Например, для кривых Безье в этом качестве используются многочлены Бернштейна.

Возникает вопрос, можно ли произвольную кубическую параметризованную кривую рассматривать как элементарную сглаживающую сплайновую кривую? Частично ответ на этот вопрос дают следующие теоремы:

Теорема 1. *Для всякой кубической параметрической кривой и для любого базиса* $\{b_i(t), i = 0,1,2,3\}$ *в пространстве многочленов третьей степени существует и притом единственный массив точек* $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ *такой, что кривая может быть представлена в виде*

$$R(t) = b_0(t)P_0 + b_1(t)P_1 + b_2(t)P_2 + b_3(t)P_3 .$$

Теорема 2. *Для всякой кубической параметрической кривой существует единственный массив точек, относительно которого эта кривая может рассматриваться как B-сплайновая кривая (кривая Безье).*

Таким образом, задача построения сглаживающих кубических сплайнов и изучения их свойств во многом сводится к нахождению базиса в пространстве кубических многочленов. В свою очередь, для нахождения базисных многочленов достаточно решить многоточечную краевую задачу, которая в аналитическом виде выражает геометрические свойства соответствующей составной сглаживающей кривой.

Остаются открытыми следующие вопросы:

1. Является ли произвольная кубическая параметрическая кривая составной сплайновой кривой.

2. Всякий ли базис в пространстве многочленов третьей степени порождает сплайновую кривую, а если – да, то каковы свойства этой кривой.

3. Пусть дана аппроксимирующая сплайновая кривая. Можно ли рассматривать ее как сглаживающую сплайновую кривую относительно некоторого массива и как найти этот массив.