Библиографический список

1. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. – М.: Наука, 1985.
2. Пономарев И.В., Славский В.В. Равномерно нечеткая модель линейной регрессии // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. – 2010. – Т. 10, №2. – С. 118–134.
3. Сантало Луи А. Интегральная геометрия и геометрические вероятности / пер. с англ. ; под ред. Р.В. Амбарцумяна. – М.: Наука, 1983.

Определение кривизны три-ткани В. Бляшке как инварианта трехканального изображения

О.В. Самарина, В.В. Славский
ЮГУ, г. Ханты-Мансийск

Инварианты изображения относительно различных групп преобразований являются наиболее эффективными характеристиками изображения, которые можно использовать в самых различных прикладных задачах анализа и обработки изображений. Причем чем шире такая группа преобразований, тем более устойчивым будет инвариант.

В данной работе определяется и исследуется инвариант трехканальных изображений относительно максимально широкой «топологической» группы преобразований, основанный на геометрии три-ткани разработанной В. Бляшке [1].

Рассмотрим RGB-изображение. Каждый канал (слой) такого изображения соответствует своему цвету в цветовой гамме RGB. В математической постановке это означает, что заданы три неотрицательные функции в некоторой области на плоскости. С точностью до цветовой коррекции такое изображение определяется семействами линий уровня функций $\mathrm{u_i}(\mathrm{x,y})$, $i=1,2,3$ в некоторой области D на плоскости:

$$L_1=\{(x,y):u_1(x,y)=const\};$$

$$L_2=\{(x,y):u_2(x,y)=const\};$$

$$L_3=\{(x,y):u_3(x,y)=const\}.$$

Будем называть эти три семейства линий топографической сеткой (или три-тканью) данного изображения. Функцией три-ткани называется любая функция $W(u_1,u_2,u_3)$ нетождественно равная константе, такая, что в области D выполняется тождество:

$$W\left(u_1(x,y),u_2(x,y),u_3(x,y)\right)\equiv 0\,.$$

В. Бляшке предложил рассматривать «топологическую» дифференциальную геометрию, т.е. изучать дифференциально-геометрические свойства различных объектов, инвариантные относительно произвольных взаимно-однозначных и взаимно-непрерывных (топологических) преобразований [1]. При этом использование классического аппарата дифференциальной геометрии заставляет ограничиться преобразованиями, задаваемыми функциями, дифференцируемыми достаточное число раз или даже аналитическими.

Предположим, что в точке $P(0)$ выполняется условие $u_1(P_0)=u_2(P_0)=u_3(P_0)=0$. Разложим функцию ткани в степенной ряд по u_i:

$$W=W_1u_1+W_2u_2+W_3u_3+\frac{1}{2}W_{11}u_1^2+W_{12}u_1u_2+\ldots$$

Здесь величины частные производные первого и второго порядка функции ткани W по переменным u_i.

В [1] определяется понятие кривизны ткани – κ, как инвариантной характеристики ткани. Эту величину можно определить выражением $\kappa=A_{23}+A_{31}+A_{12}$, где величины A_{rs} имеют вид:

$$A_{rs}=\frac{1}{W_rW_s}\frac{\partial^2}{\partial u_r\partial u_s}\ln\frac{W_r}{W_s}=\frac{W_{rrs}}{W_r^2W_s}-\frac{W_{rss}}{W_s^2W_r}+\frac{W_{rs}}{W_rW_s}\left(\frac{W_{ss}}{W_s^2}-\frac{W_{rr}}{W_r^2}\right).$$

Кривизну κ трехканального изображения можно определить и иным способом. Предположим (используя локальный диффеоморфизм), что первые две функции имеют вид $\mathrm{u}_1(\mathrm{x},\mathrm{y})=x$, $\mathrm{u}_2(\mathrm{x},\mathrm{y})=y$ координатных функций, а третья функция $\mathrm{u}_3(\mathrm{x},\mathrm{y})$ произвольная – три раза непрерывно дифференцируемая функция. Тогда используя разложение Тейлора 3-го порядка с центром в произвольной точке области, получим:

$$u_3(x,y)=a+p_1x+p_2y+1/2\left(b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2\right)+$$
$$1/6\left(b_{111}x^3+3b_{112}x^2y+3b_{122}y^2x+b_{222}y^3\right)+o\left(\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\right).$$

Нетрудно вычислить коэффициенты этого разложения Тейлора перейдя к дискретной сетке [2, 4] – цифровые изображения определены на дискретной сетке точек. В данном случае кривизна Бляшке три-ткани RGB-изображения определена формулой:

$$\kappa = \left(p_1 p_2 \left(b_{112} p_2 - b_{122} p_1\right) + b_{12}\left(b_{22} p_1^2 - b_{11} p_2^2\right)\right) / \left(p_1^3 p_2^3\right).$$

Таким образом, кривизна ткани В. Бляшке может быть использована в качестве инварианта RGB-изображения относительно наиболее широкой группы преобразований изображения [2, 3]. Это особенно важно при решении широкого класса задач цифровой обработки изображений, таких как задачи дистанционного зондирования, анализ биомедицинских изображений, распознавание образов, отыскание снимка по образцу и т. п.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракт 02.740.11.0457) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1).

Библиографический список

1. Бляшке В. Введение в геометрию тканей / пер. с нем. – М.: Физмат, 1959. – 144 с.

2. Самарина О.В. Групповые инварианты изображения. – Germany: Lambert Academic Publishing, 2010.

3. Самарина О.В. Инварианты одноканального изображения // Вестник НГУ, серия : информационные технологии. – Новосибирск, 2008. – Т. 6, вып. №1. – С. 69–79.

4. Самарина О.В., Славский В.В. Применение теории три-ткани В. Бляшке в цифровой обработке изображений // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование: тез. докл. Международной научной конференции. – Волгодонск, 2011. – С. 166–167.

Основы сферической тригонометрии

А.П. Шишминцева
ГАГУ, г. Горно-Алтайск

Сферическая тригонометрия – это раздел сферической геометрии, изучающий зависимости между сторонами и углами сферических треугольников.

Первые результаты в этом направлении принадлежат греческому астроному Гиппарху из Никеи в середине II в. д.э., а сами свойства прямоугольных сферических треугольников были известны Менелаю и Клавдию Птолемею, который создал геоцентрическую систему мира.