УДК 514.75

Поверхность переноса и лист Мебиуса

М.А. Чешкова
АлтГУ, г. Барнаул

Впервые уравнение неориентируемой поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. В работах [3–5] строятся листы Мебиуса, указано разрезание бутылки Клейна на два листа Мебиуса.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π-периодической вектор-функцией $\rho=\rho(v)$, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической.

Так как $\rho(v)=\rho(v+4\pi)$, то функция $s(v)=\frac{1}{2}(\rho(v)+\rho_1(v))$, где $\rho_1(v)=\rho(v+2\pi)$ есть 2π-периодическая не равная нулю, а вектор-функция $l(v)=\frac{1}{2}(\rho(v)-\rho_1(v))$

есть 2π-антипериодическая не равная нулю.

Рассмотрим линейчатую поверхность $M\ : r(u,v)=s(v)+ul(v)$.

Когда точка кривой $s=s(v)$ завершит полный оборот, то прямая $L=(s(v),l(v))$

сменит направление на противоположное.

Рассмотрим вектор нормали $n=[s'(v),l(v)]$ вдоль линии $s=s(v)$. Если $n\neq 0$, то $n(v)$ сменит направление на противоположное, когда точка кривой $s=s(v)$ завершит полный оборот. Поверхность M в этом случае есть односторонняя.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Если гладкая замкнутая неплоская кривая без самопересечения задается 4π-периодической вектор-функцией $\rho=\rho(v)$, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической, то вектор-

функция $r(u,v)=s(v)+ul(v)$, *где* $l(v)=\frac{1}{2}(\rho(v)-\rho_1(v))$,

$s(v)=\frac{1}{2}(\rho(v)+\rho_1(v))$, $\rho_1(v)=\rho(v+2\pi)$ $\rho_1(v)=\rho(v+2\pi)$,

определяет лист Мебиуса, для которого $s=s(v)$ *– средняя линия, а* $\rho=\rho(v)=r(1,v)$ *– край.*

Поверхностью переноса называется поверхность вида $R(u,v)=U(u)+V(v)$

Теорема. *Если функции* $U(u),V(v)$ *есть* 2π*-периодические, где* 2π *наименьший период, то вектор-функция*

$\rho(v)=U(\frac{kv}{2})+V(v)$ ($\rho(u)=U(u)+V(\frac{ku}{2})$), *где* k *– нечетное число,*

есть 4π*-периодическая.*

Линейчатая поверхность $r(u,v)=s(v)+ul(v)$ *есть лист Мебиуса, перекрученный* k *раз.*

Замечание. Если одна из координат вектор-функции $U(u)$, например, U_z π– периодическая, то образующие линейчатой поверхности параллельны плоскости $z=0$. Лист Мебиуса в этом случае есть поверхность Каталана [6, с. 77].

Построим примеры листа Мебиуса, край которого лежит на поверхности переноса.

Пример. Рассмотрим поверхность переноса

$$R(u,v)=U(u)+V(v), U(u)=(\sin(u),\cos(u),\sin(2u)), V(v)=(\sin(v),\cos(v),0).$$

Зададим на этой поверхности линию $u=\frac{v}{2}$. Имеем

$\rho(v)=(\sin\frac{v}{2}+\sin(v),\cos(\frac{v}{2})+\cos(v),\sin(v))$, $s(v)=(\sin(v),\cos(v),\sin(v))$,

$l(v)=(\sin(\frac{v}{2}),\cos(\frac{v}{2}),0)$. Лист Мебиуса есть поверхность Каталана.

Используя математический пакет MAPLE ([7]) построим рассматриваемые поверхности и кривые (рис. 1–4).

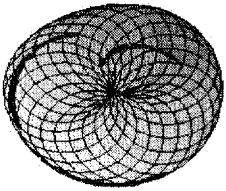

Рис. 1. Поверхность переноса

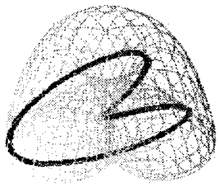

Рис. 2. Край $u = \frac{v}{2}$

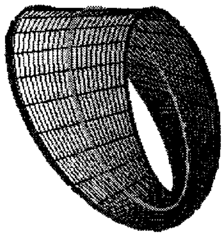

Рис. 3. Лист Мебиуса и край $u = \frac{v}{2}$

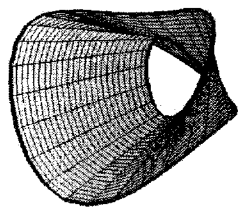

Рис. 4. Лист Мебиуса и край $v = \frac{u}{2}$

Библиографический список

1. Mashke H. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans.Amer.Math.Sos., 1:1(1900).
2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. – 2007. – Т. 71, №5. – С. 197–224.
3. Чешкова М.А. О листе Мебиуса // Вестник Барнаульского государственного педагогического университета. – 2006. – Вып. 6. – С. 83–86.
4. Чешкова М.А. Самопересечение листа Мебиуса // Математическое образование в регионах России: труды международной научно-практической конференции. – Барнаул, 2007. – С. 50–54.
5. Чешкова М.А.О бутылке Клейна // Известия Алтайского университета. – Барнаул, 2012. – №1/1. – С. 130–133.
6. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. – М., 2006.
7. Васильев А.Н. Maple 8. – М., СПб., Киев, 2003.