УДК 517.9

Итерационный метод решения задачи Стокса

А.С. Кузиков, С.С. Кузиков
АлтГУ, г. Барнаул

Рассмотрим в прямоугольной области $D = \{(x,y): 0 < x < a, 0 < y < b\}$ с границей Г задачу Стокса в классической формулировке:

$$-\Delta u + grad p = f, div u = 0, u|_{\Gamma} = 0. \qquad (1)$$

Здесь задана правая часть – вектор-функция $f = (f^{(1)}(x,y), = (f^{(2)}(x,y))^T$, а неизвестными являются вектор-функция $u = (v(x,y), w(x,y))^T$ и скалярная функция $p = (x,y)$, определенная с точностью до константы. Для однозначности p, как правило, предполагают выполненным условие нормировки $\int_D p(x,y)dxdy = 0$.

Задачу (1) будем рассматривать как задачу минимизации функционала $J = \frac{1}{2}\int_D (divu)^2 dD$ посредством выбора «управления» р.

Показано, что градиент функционала $J' = div\psi, \psi = (\psi_1(x,y), \psi_2(x,y))$, где ψ решение задачи $\Delta\psi = grad\ divu, \psi|_{\Gamma} = 0$.

Для отыскания p строится итерационный процесс $p^{n+1} = p^n - \alpha_n div\psi^n, n = 0,1, \ldots$, где итерационный параметр α_n определяется согласно методу скорейшего спуска. Для численного решения задачи предлагается разностная схема с разнесенными узлами для u и p.

УДК 517.925

Окрестность множеств и свойство решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений

В.А. Миненко
АлтГПА, г. Барнаул

Определение 1. Пусть непустое множество А включается в R^n, $\varepsilon > 0$. Тогда множество точек из R^n, расстояния которых до множества А меньше ε, называется ε — окрестностью множества А, и обозначается так: $U_\varepsilon A$.

Теорема 1. Если $\{M_\alpha\}$ – семейство непустых множеств из R^n, где α пробегает некоторое множество действительных чисел, то $\bigcup_\alpha U_\varepsilon M_\alpha = U_\varepsilon \bigcup_\alpha M_\alpha$.

Теорема 2. Если К – непустое, компактное множество в R^n, $K \subset D$, где D – открытое, ограниченное множество, то расстояния точек множества К до границы множества D больше некоторого положительного числа.

Рассматривается система

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \dots, x_n)\ (i = 1, \dots, n),$$

где $X_i = X_i(t, x_1, \dots, x_n)$ и $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(i, j = 1, \dots, n)$ непрерывны на $E = I \times D$ ($I = (\underline{t}, +\infty)$; D – область в R^n).

Или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x).$$

Пусть $x = x(t, x_0, t_0)$ – решение системы, для которого $x(t_0, x_0, t_0) = x_0$, $x_0 \in M$, где $M \subset D$, $t_0 \in I$, определено на $[t_0, t_0 + T]$; $t' \in [t_0, t_0 + T]$. Тогда через $M_{t'}$ обозначим множество $\{x(t', x_0, t_0)\colon x_0 \in M\}$.

Теорема 3. Если множество M компактно, то $\bigcup_{t'} M_{t'}$, где $t' \in [t_0, t_0 + T]$, компактно.

УДК 517.96

Проблема существования решения задачи для уравнения Пуассона

Г.А. Павлов, Н.А. Абакумова
АГАУ, г. Барнаул

В плоском случае рассматривается задача определения правой части уравнения Пуассона. Приведены примеры неединственности решения задачи, а также теоремы существования решения. В случае уравнения Гельмгольца подобная задача рассматривалась в работах [1, 2] а также в монографии [3, с. 651, с. 675, с. 676].