7. Поляков В.Л. О механической суффозии грунтов под действием цилиндрического стока переменной интенсивности // Прикладная гидромеханика. – Киев, 2006. – Т. 8, №4. – С. 43–52.

8. Кузнецов А.Ю., Пославский С.А. Исследование математической модели механической суффозии // Вестник Харьковского национального университета. Серия «Математика, прикладная математика и механика». – Харьков, 2009. – №875. – С. 57–68.

9. Frederic Golay, Stephane Bonelli. Numerical modeling of suffusion as an interfacial erosion process. European Journal of Environmental and Civil Engineering, 2010.

10. Хусаинова З.Р. Теоретическое исследование процессов термоэрозии и термокарста многолетнемерзлотных пород: дис. ... к-та физ.-мат. наук. – Уфа, 2007.

11. Протодьяконова Н.А. Математическое моделирование деформаций грунта при оттаивании с учетом фильтрационной консолидации: дис. ... к-та физ.-мат. наук. – Якутск,2008.

12. Суриков В.В. Механика разрушения мерзлых грунтов. – Ленинград, 1979. –128 с.

УДК 513. 83

О единственности разбиения линии на конгруэнтные части

И.В. Поликанова

АлтГПА, г. Барнаул

Определим линию γ в метрическом пространстве E как вложение φ числового отрезка $[a,b]\subset R$ в E. Образ при этом вложении числового отрезка $[c,d]$ такого, что $[c,d]\subset[a,b]$, называется дугой с концами $C=\varphi(c)$ и $D=\varphi(d)$ и обозначается $\overline{CD}$. Точки $A_0=\varphi(a)$ и $B=\varphi(b)$ – концы линии λ, а $\varphi(t)$ при $t\in(a,b)$ – внутренние точки. Ввиду того, что отображение φ:[a,b]$\to\gamma$ является гомеоморфизмом, всякий набор чисел $\{t_1, t_2, ..., t_{n-1}\}$ таких, что $a< t_1< t_2<...< t_{n-1}< b$, задаёт *n-1* внутренних точек $A_1, A_2,.., A_{n-1}$ на γ и однозначно определяет *n* дуг $\breve{a}_i=\overline{A_{i-1}A_i}$, i = 1,2,...,n (A_n =B), получающих естественный порядок на γ и обладающих тем свойством, что $\breve{a}_i \cap$

$\breve{a}_{i+1} = A_i$, $\breve{a}_i \cap \breve{a}_j = \varnothing$ при $|i-j|>1$. В этом случае мы будем говорить о разбиении линии γ точками $A_1, A_2,.., A_{n-1}$ на части или дуги и записывать $\gamma = \breve{a}_1 \cup \breve{a}_2 \cup ... \cup \breve{a}_n$.

Под движением метрического пространства E с метрикой ρ будем понимать изометрическое отображение пространства E на себя. Будем говорить, что линия γ разбивается точками $A_1, A_2,.., A_{n-1}$ на n конгруэнтных частей (дуг), если её разбиение $\gamma = \breve{a}_1 \cup \breve{a}_2 \cup ... \cup \breve{a}_n$ этими точками на части обладает свойством: для каждого i $\in\{1,2,...,n\}$ найдётся такое движение f_i пространства, что $\breve{a}_i = f_i(\breve{a}_1)$.

***Замечания:* 1.** Поскольку движение является гомеоморфизмом, то образом линии при движении является линия, концами которой служат образы концов данной линии.

2. Так как композиция движений является движением, то, в случае разбиения линии на конгруэнтные части: $\gamma = \breve{a}_1 \cup \breve{a}_2 \cup ... \cup \breve{a}_n$, для любых $i, j \in\{1,2,...,n\}$ существует движение f_{ij} такое, что $\breve{a}_i = f_{ij}(\breve{a}_j)$.

Теорема 1. *Каковы бы ни были в метрическом пространстве множество Y и его собственное компактное подмножество X не существует движения, отображающего X на Y.*

Доказательство. Допустим противное: для множества Y в метрическом пространстве (E, ρ) и его собственного компактного подмножества X существует движение f такое, что Y = f(X). Выберем произвольно точку $y \in Y \setminus X$. В силу компактности X нижняя грань расстояний $r = \inf_{x \in X} \rho(y,x)$ положительна. Множество Y – компактно, будучи образом компактного множества X при непрерывном отображении, каким является движение f. Поэтому из всякого его покрытия открытыми шарами с радиусами $r/2$ можно выбрать конечное подпокрытие. Пусть n – минимальное число шаров с радиусами $r/2$, достаточное для покрытия множества Y, и $\Omega = \{B_1, B_2,.., B_n\}$ – одно из таких покрытий: $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Так как $X \subset Y$, то данное семейство шаров будет являться покрытием и для X. Существует шар B_j этого покрытия, содержащий точку y и, значит, целиком содержащийся в открытом шаре с центром y радиуса r. Ввиду определения числа r шар B_j не имеет общих точек с множеством X. Поэтому, удалив его (и другие, не пересекающиеся с X шары) из семейства Ω, мы получим покрытие множества X шарами (при соответствующей перенумерации) $\{B_1, B_2,.., B_m\}$: $X \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i$, где $m<n$. Тогда $Y = f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{m} f(B_i)$. При движении открытые шары отображаются в открытые шары того же радиуса. Поэтому последнее соотношение означает, что множество Y покрывается семейством открытых шаров $\{f(B_1), f(B_2),.., f(B_m)\}$ с радиусами $r/2$, причём в количестве меньшем, чем n. Полученное противоречие доказывает ложность допущения. Теорема доказана.

Следствие 1. *Каковы бы ни были в метрическом пространстве множество Y и его собственное компактное подмножество X не существует движения f такого, что $Y \subset f(X)$.*

Основной результат статьи:

Теорема 2. *Если линия в метрическом пространстве допускает разбиение на n конгруэнтных частей, то такое разбиение единственно.*

Доказательство. Проводится индукцией по числу n конгруэнтных частей, на которые разбивается линия.

A). $n = 2$. Пусть линия γ имеет 2 различных разбиения на 2 конгруэнтные части: $\gamma = \breve{a}_1 \cup \breve{a}_2 = \breve{b}_1 \cup \breve{b}_2$. Пусть s, t – параметры делящих точек 1-ого и 2-ого разбиений соответственно. Для определённости будем считать, что s< t. Тогда a< s< t< b и, значит, $[a,s] \subset [a,t]$, $[t,b] \subset [s,b]$. Поэтому $\breve{a}_1 \subset \breve{b}_1$ и $\breve{b}_2 \subset \breve{a}_2$. Пусть f, g – движения такие, что $\breve{a}_2 = f(\breve{a}_1)$ и $\breve{b}_2 = g(\breve{b}_1)$. Тогда $g(\breve{b}_1) \subset f(\breve{a}_1)$. Следовательно $g^{-1}(g(\breve{b}_1)) \subset g^{-1}(f(\breve{a}_1))$. Так как f, g – биекции, то $g^{-1}(g(\breve{b}_1)) = (g^{-1} \circ g)(\breve{b}_1) = \breve{b}_1$, $g^{-1}(f(\breve{a}_1)) = (g^{-1} \circ f)(\breve{a}_1)$. Итак, $\breve{b}_1 \subset (g^{-1} \circ f)(\breve{a}_1)$. Получили, что дуга $\breve{b}_1$ содержится в образе своего собственного компактного подмножества $\breve{a}_1$ при движении $g^{-1} \circ f$, что противоречит теореме 2. Сделанное допущение ложно. Разбиение линии на 2 конгруэнтные части единственно.

B). Пусть утверждение справедливо для разбиений линии на k конгруэнтных дуг при всех $k < n$. Докажем единственность разбиения на n конгруэнтных дуг. Допустим противное: существует 2 разбиения линии $\gamma = \breve{AB}$ на n конгруэнтных частей: $\gamma = \breve{a}_1 \cup \breve{a}_2 \cup ... \cup \breve{a}_n = \breve{b}_1 \cup \breve{b}_2 \cup ... \cup \breve{b}_n$. Пусть $t_1 < t_2 <...< t_{n-1}$ и $s_1 < s_2 <...< s_{n-1}$ – параметры, соответствующие делящим точкам $K_1, K_2,.., K_{n-1}$ 1-ого и $L_1, L_2,..., L_{n-1}$ 2-ого разбиений при гомеоморфизме $\varphi:[a,b] \to \gamma$. Заметим, что $t_1 \neq s_1$, иначе в силу замечания 2 дуга $\overset{\frown}{K_1B}$ линии γ допускала бы 2 различных разбиения на *n-1* конгруэнтных дуг, что противоречило бы индукционному предположению. Пусть для определённости $t_1 < s_1$. Тогда $[a, t_1] \subset [a, s_1]$. Поэтому $\overset{\frown}{a_1} \subset \overset{\frown}{b_1}$. Тогда по крайней мере 1 из *n-1* интервалов (s_1, s_2), (s_2, s_3), (s_{n-1}, b) не содержит ни одно из *n-2* значений $t_2, t_3, \dots, t_{n-1}$, а значение t_1 и подавно ввиду линейного порядка на множестве [a,b]. Пусть это будет интервал (s_{i-1}, s_i), где $i>1$. Пусть j – наибольший из номеров таких, что $t_{j-1} \leq s_{i-1}$, где $j \geq 2$. Поскольку $t_j \notin (s_{i-1}, s_i)$, то $[s_{i-1}, s_i] \subset [t_{j-1}, t_j]$. Следовательно, $\overset{\frown}{b_i} \subset \overset{\frown}{a_j}$. Учитывая, что $\overset{\frown}{b_i} = g\ (\overset{\frown}{b_1})$, а $\overset{\frown}{a_j} = f\ (\overset{\frown}{a_1})$ при некоторых движениях f и g, запишем $g\ (\overset{\frown}{b_1}) \subset f(\overset{\frown}{a_1})$ и, повторяя рассуждения аналогичные приведённым в пункте А), получим: $\overset{\frown}{b_1} \subset (g^{-1} \circ f)(\overset{\frown}{a_1})$. Таким образом, дуга $\overset{\frown}{b_1}$ содержится в образе своего собственного компактного подмножества $\overset{\frown}{a_1}$ при движении $g^{-1} \circ f$, что противоречит теореме 1. Сделанное допущение ложно. Разбиение линии на *n* конгруэнтных дуг единственно. Теорема доказана.

Замечание 3. Теорема 2 не верна для замкнутых линий. Например, эллипс допускает бесконечное множество разбиений на 2 конгруэнтные части.

УДК 532.5

Моделирование двухслойных течений с учетом испарения с границы раздела

Е.В. Резанова
АлтГУ, г. Барнаул

В работе проводится моделирование стационарных конвективных течений жидкости и газа с учетом испарения жидкости на границе раздела. Двухслойная система состоит из жидкости и газа (точнее, смеси газа и пара), заполняющих горизонтальные слои с твердыми, непроницаемыми верхней и нижней границами (рис. 1). Данная система «жидкость – газ» находится под действием продольных градиентов температуры.