МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Алтайский государственный университет»
Факультет математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа

ГРУППЫ ЛИ С МЕТРИКОЙ СОЛИТОНА РИЧЧИ

Магистерская диссертация

Выполнил студент 446М группы
Клепиков Павел Николаевич
____

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор
Родионов Евгений Дмитриевич
____

Допустить к защите
зав. кафедрой, к. ф.-м. н.,
доцент Саженков А.Н.
____
"____"________________ 2016г.

Работа защищена
"____"________________ 2016г.
Оценка ______________________

Барнаул 2016

Оглавление

Введение

Исследованию многообразий постоянной кривизны Риччи, или эйнштейновых многообразий, посвящены работы многих математиков (см., например, обзор [1]). В последнее время изучаются различные обобщения многообразий Эйнштейна, одними из которых являются солитоны Риччи, впервые рассмотренные Р. Гамильтоном в работе [2]. Однородные солитоны Риччи исследовались в работах многих математиков, но классификация однородных солитонов Риччи известна лишь в малых размерностях и не является исчерпывающей (см. [3, 4]).

В общем случае задача изучения, исследования и классификации солитонов Риччи на многообразиях является довольно сложной. Поэтому предполагаются ограничения либо на строение многообразия, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на размерность многообразия, либо на класс векторных полей, учавствующих в записи уравнения солитона Риччи.

Одним из естественных ограничений является предположение, что рассматриваемое многообразие является однородным пространством и, в частности, группой Ли. В этом направлении известен ряд результатов. Так, например, на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой, размерности не более трех, не существует нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи (см. [5]). Аналогичный факт известен для унимодулярных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой любой конечной размерности. Вопрос о существовании нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи на группах Ли размерности более трех с левоинвариантной римановой метрикой до сих пор остается открытым.

Другим важным примером являются алгебраические солитоны Риччи на группах Ли, которые впервые были рассмотрены Х. Лауре. Им же было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой является однородным солитоном Риччи (см. [6]). Позднее этот результат был обобщен К. Онда на случай групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой (см. [7]).

Ещё одним естественным ограничением является рассмотрение определённого класса метрик на многообразии. Например, можно рассматривать группы Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой. В этом случае известны примеры нетривиальных алгебраических солитонов Риччи, но все они возникают в том случае, когда оператор Риччи не является диагонализируемым. Данные примеры позволяют сделать предположение о том, что в случае диагонализируемого оператора Риччи на конформно плоских метрических группах Ли все алгебраические солитоны Риччи являются тривиальными.

Целью настоящей работы является изучение однородных инвариантных и алгебраических солитонов Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариатной римановой метрикой, а также алгебраических солитонов Риччи в случае n-мерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой конформно плоской метрикой и диагонализируемым оператором Риччи.

Основные задачи работы включают:

1. Классификацию 4-мерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой алгебраического солитона Риччи.

2. Получение ответа на вопрос о существовании нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

3. Изучение строения конформно плоских алгебраических солитонов Риччи на метрических группах Ли.

Объектом исследования являются уравнения однородных инвариантных и алгебраических солитонов Риччи на метрических группах Ли.

Предметом исследования служат компьютерные модели, алгоритмы, программы для изучения однородных солитонов Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой.

Методы исследования. Для решения поставленных задач применялись методы компьютерного моделирования, математического анализа, теории групп и алгебр Ли, теории солитонов Риччи, (псевдо)римановой геометрии, тензорного анализа и пакеты аналитических вычислений.

Научная новизна работы определяется проведенными исследованиями, в результате которых получены новые результаты в теории солитонов Риччи на группах Ли. Именно:

- С помощью обобщенных базисов Дж. Милнора получена классификация алгебраических солитонов Риччи на 4-мерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.
- Получен отрицательный ответ на вопрос о существовании нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.
- Доказана теорема о том, что все алгебраические солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой конформно плоской метрикой и диагонализируемым оператором Риччи являются тривиальными.

Теоретическая и практическая значимость настоящей работы заключается в возможности использования полученных результатов в дальнейших исследованиях однородных инвариантных и алгебраических солитонов Риччи на конечномерных группах Ли с левоинваринтной (псевдо)римановой метрикой.

Апробация работы. Промежуточные результаты работы были представлены на Краевом семинаре по геометрии и математическому моделированию (Барнаул, 2015 г.), II региональной молодежной конференции «Мой выбор – наука!» (Барнаул, 2015 г.), 53-й международной научной студенческой конференции “МНСК–2015” (Новосибирск, 2015г.), Всероссийской конференции по математике “МАК–2015” (Барнаул, 2015г.), Международной школе-семинаре по динамическим системам, геометрии и теории управления (о. Байкал, 2015г.), Международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске — 2015» (Новосибирск, 2015г.), Всероссийской конференции “Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники” (Барнаул, 2015г.), Международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования» (Барнаул, 2015 г.), Международной конференции «Метрические структуры и управляемые системы» (Новосибирск, 2015г.).

Публикации. По теме исследования опубликовано 15 работ.

Объем и структура. Выпускная работа состоит из введения, 3 глав, разбитых на разделы, заключения и списка литературы, включающего 42 наименования. Общий объем работы составляет 75 страницы, работа содержит 2 таблицы.

Глава 1

Левоинвариантные (псевдо)римановы метрики на группах Ли

1.1 Алгебра Ли группы Ли

Пусть G — группа Ли. С каждым элементом $y \in G$ связан диффеоморфизм $l(y) : G \to G$, который определяется равенством $l(y)x = y \cdot x$. Отображение $l(y)$ называется левым сдвигом. Векторное поле X на G называется *левоинвариантным*, если оно инвариантно относительно всех левых сдвигов, т.е. $dl(y)X_p = X_{y \cdot p} \quad \forall p, y \in G$. Здесь X_p — касательный вектор в точке $p \in G$. Левоинвариантные векторные поля на G образуют векторное пространство. Обозначим его через $L(G)$. Если $X, Y \in L(G)$, то скобка Пуассона $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ также будет левоинвариантным векторным полем, и это задает в $L(G)$ билинейную операцию, относительно которой $L(G)$ является алгеброй Ли.

Алгебра Ли $L(G)$ левоинвариантных векторных полей на G естественно отождествляется с касательным пространством T_eG в единице $e \in G$. Если $X_e \in T_eG$, то соответствие $X_e \longmapsto X \in L(G)$ определяет искомый изоморфизмом пространств $L(G)$ и T_eG. Положим $[X_e, Y_e] = [X, Y]_e$. Векторное пространство $\mathfrak{g} = T_eG$ с операцией $[X_e, Y_e]$ образует алгебру Ли и называется *алгеброй Ли группы G*.

Определение 1. Алгебра Ли называется унимодулярной, если все внутренние автоморфизмы $\mathrm{ad}_X \colon V \longmapsto [X, V]$ имеют равный нулю след.

Определение 2 (см., н-р, [1]). *(Псевдо)римановой метрикой* сигнатуры (p, q) на дифференцируемом многообразии M размерности $n = p + q$ называется такое гладкое невырожденное симметрическое тензорное поле g_{ij} строения $(2, 0)$ на M, что для любой точки $x \in M$ форма $ds_x = g_{ij}dx^i dx^j$ на T_xM невырождена и имеет сигнатуру (p, q).

Если $q = 0$ (т.е. форма ds_x положительно определена), тензорное поле g_{ij} называется *римановой метрикой*.

Если $p = 1$ и $q > 0$, тензорное поле g_{ij} называется *лоренцевой метрикой*.

Замечание. *(Псевдо)римановой метрикой на M называют также квадратичную форму $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, где тензорное поле g_{ij} удовлетворяет условиям определения 2.*

Определение 3. Метрика на G называется *левоинвариантной*, если она инвариантна относительно левых сдвигов группы G.

1.2 Инвариантные тензорные поля на группах Ли

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие с метрическим тензором $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Обозначим через T_xM касательное пространство к M в точке x, а через $\mathfrak{X}(M)$ — множество всех векторных полей на M.

Определение 4. *Линейной связностью* или *ковариантной производной* на M называется отображение $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ (записываемое в виде $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$), обладающее следующими свойствами

$$\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2,$$
$$\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y,$$
$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y,$$
$$\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X Y,$$

где f — некоторая функция на M.

Определение 5. *Тензором кручения T* линейной связности ∇ на многообразии M называется (2,1)-тензорное поле

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Имеет место (см., например, [1,8])

Теорема 1.1 (Основная теорема (псевдо)римановой геометрии)**.** *На любом (псевдо)римановом многообразии (M,g) существует единственная линейная связность ∇ (связность Леви-Чивита), удовлетворяющая условиям*

(a) $V\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_V X, Y\rangle + \langle X, \nabla_V Y\rangle$,

(b) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, *т.е.* $T(X,Y) = 0$

для всех $X,Y,V \in \mathfrak{X}(M)$*, где* T *— тензор кручения для* ∇*.*

Тождество Риччи (a) означает, что ∇ — риманова связность, т.е. g параллелен $\nabla g = 0$. Условие (b) означает, что ∇ — связность без кручения.

Определение 6. Тензор $R(X,Y)V = \nabla_Y\nabla_X V - \nabla_X\nabla_Y V + \nabla_{[X,Y]}V$, где X,Y,V — произвольные векторные поля на (псевдо)римановом многообразии M, называется *тензором Римана.*

Определение 7. *Тензором Риччи* $r(X,Y)$ называется след оператора $\mathrm{tr}(V \longrightarrow R(X,V)Y)$.

Определение 8. *Оператором Риччи* ρ называется линейный оператор, определяемый равенством

$$g(\rho(X),Y) = r(X,Y).$$

Определение 9. *Скалярной кривизной* называется след оператора Риччи $s = \mathrm{tr}(\rho)$.

Пусть далее G — группа Ли, $\{\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]\}$ — соответствующая алгебра Ли, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — левоинвариантная (псевдо)риманова метрика на G, ∇ — связность Леви-Чивита.

Определение 10. Линейный оператор $D\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ называется *дифференцированием* алгебры Ли если выполняется тождество

$$D([X,Y]) = [D(X),Y] + [X,D(Y)], \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Фиксируем базис $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ левоинвариантных векторных полей в $\mathfrak{g}$. Положим

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k, \quad \nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k, \quad \langle E_i, E_j \rangle = g_{ij}, \tag{1.1}$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли, Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля второго рода, g_{ij} — метрический тензор. Из (1.1), в силу введенных обозначений, получаем

$$2\Gamma_{ij}^s g_{sk} = c_{ij}^s g_{sk} + c_{ki}^s g_{sj} - c_{jk}^s g_{si}.$$

Пусть $c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks}$, тогда символы Кристоффеля первого рода вычисляются по формулам

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij}\right). \tag{1.2}$$

Соответственно символы Кристоффеля второго рода имеют вид $\Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks}$, где $\|g^{ks}\|$ есть матрица обратная к $\|g_{ks}\|$.

Тогда формулу для вычисления тензора Римана можно представить в виде

$$R_{ijkt} = c_{ij}^s \Gamma_{sk,t} - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is,t} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js,t}. \tag{1.3}$$

Тензор Риччи и скалярную кривизну соответственно можно найти по формулам

$$r_{ik} = R_{ijkt} g^{jt}, \quad s = r_{ik} g^{ik}. \tag{1.4}$$

Пусть $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ — некоторое дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда общий вид матриц дифференцирований алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно найти как решение следующей системы линейных уравнений:

$$D_k^t c_{ij}^k = D_i^k c_{kj}^t + D_j^k c_{ik}^t,$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Замечание. *Вышеприведенные формулы показывают, что данные тензоры суть функции от структурных констант c_{ij}^k алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и метрического тензора g_{ij}.*

1.3 Однородные солитоны Риччи

Определение 11. Полное риманово многообразие (M, g) называется *эйнштейновым многообразием*, если тензор Риччи r удовлетворяет уравнению Эйнштейна:

$$r = \Lambda \cdot g \tag{1.5}$$

для некоторой константы $\Lambda \in \mathbb{R}$.

Однородные эйнштейновы многообразия изучены в работах многих математиков (см., например, обзоры [1, 9]). Важным обобщением эйнштейновых метрик являются солитоны Риччи, которые были впервые рассмотрены Р. Гамильтоном в работе [2].

Определение 12. Полное (псевдо)риманово многообразие (M, g) называется *солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению:

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g, \tag{1.6}$$

где r — тензор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, $L_X g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X.
Если $M = G/H$ — однородное пространство с однородной римановой метрикой g, тогда $(G/H, g)$ — *однородный солитон Риччи.*

Солитоны Риччи естественным образом связаны с решениями уравнения потока Риччи [2]. Метрика g_0 — метрика солитона Риччи тогда и только тогда, когда $g(t) = \sigma(t)\psi_t^*(g_0)$ — решение уравнения потока Риччи:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2r(g), \quad g(0) = g_0,$$

где $r(g)$ — тензор Риччи метрики g, $\sigma(t)$ — гладкая функция, ψ_t — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов на многообразии, причем $\sigma(0) = 1$ и $\psi_0 = id_{M^n}$.

С другой стороны, солитоны Риччи связаны с многообразиями Эйнштейна. Если (M, g) — солитон Риччи с некоторым киллинговым полем X (то есть $L_X g = 0$), то уравнения (1.5) и (1.6) совпадают, а метрика g является метрикой Эйнштейна.

Солитоны Риччи исследованы в работах многих математиков (см., например, обзор [3]). Классификация однородных солитонов Риччи известна только в малых размерностях и не является исчерпывающей (см. [4]).

Определение 13. Солитон Риччи называется *растягивающимся*, если $\Lambda < 0$; *устойчивым*, если $\Lambda = 0$; *стягивающимся*, если $\Lambda > 0$. Также назовем солитон Риччи *нетривиальным*, если он отличен от эйнштейнового многообразия и от прямого произведения эйнштейнового многообразия и евклидова пространства.

Если однородный солитон устойчив, то тензор Риччи тривиален (см. подробнее в [10]) и по теореме Алексеевского-Кимельфельда многообразие является плоским (см. [11]). В случае стягивающегося однородного солитона из работ [2, 12] вытекает, что он изометричен произведению компактного однородного эйнштейнова многообразия и евклидова пространства. Если однородный солитон растягивающийся, то M некомпактно (см. [13]). Известные нетривиальные растягивающиеся однородные солитоны изометричны солвсолитонам.

Растягивающиеся солвсолитоны рассмотрены в работе Х. Лауре [14], и их изучение сводится к нахождению алгебраических солитонов.

Определение 14. Группа Ли G с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g назвается *алгебраическим солитоном Риччи*, если выполняется

$$\rho = \Lambda \cdot \mathrm{Id} + D. \tag{1.7}$$

где ρ — матрица оператора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, Id — единичная матрица, D — матрица некоторого дифференцирования алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Алгебраические солитоны Риччи впервые были рассмотрены Х. Лауре. Им же было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой является однородными солитонами

Риччи (см. [6]). Позднее этот результат был обобщен К. Онда на случай групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой (см. [7]).

Исследованию алгебраических солитонов Риччи посвящены работы [10, 15, 16]. Классификация четырехмерных алгебраических солвсолитонов, с точностью до эквивариантной изометрии, приведена Х. Лауре в работе [14].

Определение 15. Группа Ли G с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g и метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ называется *полуалгебраическим солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению:

$$\rho = \Lambda \cdot \mathrm{Id} + \frac{1}{2}\left(D + D'\right),$$

где ρ — матрица оператора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$, Id — единичная матрица, D — матрица некоторого оператора дифференцирования алгебры $\mathfrak{g}$, D' — матрица оператора сопряженного оператору D относительно метрики g.

М. Яблонский изучал связь между алгебраическими и полуалгебраическими солитонами Риччи. В частности, им была доказана следующая

Теорема 1.2 (M. Jablonski, 2014 [15]). *Если группа Ли G с левоинвариантной римановой метрикой g является полуалгебраическим солитоном Риччи, то (G, g) — алгебраический солитон Риччи.*

Отметим, что в случае групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой данная теорема не выполняется (см. [17]).

Лемма 1.1. *Каждый однородный инвариатный солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой обязан быть полуалгебраическим солитоном Риччи с некоторым внутренним дифференцированием D.*

Доказательство. В случае однородного инвариантного солитона Риччи уравнение (1.6) можно привести к виду (см., например, [5]):

$$r_{ij} = \Lambda g_{ij} + X^k (c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si}),$$

где X^k — координаты левоинвариантного векторного поля X, c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, g_{ij} — компоненты метрического тензора, r_{ij} — компоненты тензора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$.

Поднимая второй индекс в предыдущем уравнении, получим

$$\rho = \Lambda \cdot \mathrm{Id} + \mathrm{ad}_X + \mathrm{ad}_X',$$

где $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$ — внутреннее дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Т.е. однородный инвариантный солитон Риччи является полуалгебраическим солитоном Риччи с $D = 2\mathrm{ad}_X$. ■

Глава 2

Однородные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой

2.1 Алгебраические солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой

Пусть $M = G$ — четырехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли.

В работах [18, 19] А.Г. Кремлевым и Ю.Г. Никоноровым построены удобные для вычислений ортонормированные базисы для каждой метрической четырехмерной алгебры Ли (по классификации Г.М. Мубаракзянова [20]), которые мы будем называть *обобщенными базисами Дж. Милнора*. Отметим, что в работе [21] с использованием алгоритма, предложенного Х. Кодама, А. Такахара, Х. Тамару в работе [22], был немного улучшен результат А.Г. Кремлева, Ю.Г. Никонорова, а именно для некоторых алгебр Ли удалось уменьшить число параметров.

Теорема 2.1 (А.Г. Кремлев, Ю.Г. Никоноров, 2008,2009; П.Н. Клепиков, Д.Н. Оскорбин, 2015 [18, 19, 21]). *Для произвольного скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на четырехмерной метрической алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ортонормированный базис $\{x_i\}$, в котором ненулевые существенные структурные константы имеют вид, указанный в таблице 2.1.*

Таблица 2.1: Структурные константы четырехмерных метрических алгебр Ли в обобщенных базисах Дж. Милнора

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$4\mathbb{A}_1$	коммутативна
2	$2\mathbb{A}_2$	$c_{1,2}^2=a$, $c_{1,3}^2=c$, $c_{1,4}^2=-ab$, $c_{2,3}^2=d$, $c_{2,4}^2=af$, $c_{3,4}^1=fg$, $c_{3,4}^2=b(d+g)+cf$, $c_{3,4}^4=g$ $(a>0,g>0)$
3	$\mathbb{A}_2\oplus 2\mathbb{A}_1$	$c_{1,2}^1=a$, $c_{1,2}^4=b$ $(a>0)$
4	$\mathbb{A}_{3,1}\oplus\mathbb{A}_1$	$c_{2,3}^1=a$ $(a>0)$
5	$\mathbb{A}_{3,2}\oplus\mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1=c_{2,3}^2=a$, $c_{2,3}^1=b$, $c_{3,4}^1=c$, $c_{3,4}^2=d$ $(a>0,b>0)$
6	$\mathbb{A}_{3,3}\oplus\mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1=c_{2,3}^2=a$, $c_{3,4}^1=b$ $(a>0)$
7	$\mathbb{A}_{3,4}\oplus\mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1=a$, $c_{2,3}^1=c$, $c_{2,3}^2=-a$, $c_{3,4}^1=d$, $c_{3,4}^2=b$ $(a>0)$
8	$\mathbb{A}_{3,5}^{\alpha}\oplus\mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1=a$, $c_{2,3}^1=c$, $c_{2,3}^2=\alpha a$, $c_{3,4}^1=d$, $c_{3,4}^2=b$ $(a>0)$
9	$\mathbb{A}_{3,6}\oplus\mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^2=-a$, $c_{2,3}^1=b$, $c_{3,4}^1=c$, $c_{3,4}^2=d$ $(a>0,b>0)$
10	$\mathbb{A}_{3,7}^{\alpha}\oplus\mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1=c_{2,3}^2=a\alpha$, $c_{1,3}^2=-\frac{a}{b}$, $c_{2,3}^1=ab$, $c_{3,4}^1=bc+d\alpha$, $c_{3,4}^2=c\alpha-\frac{d}{b}$ $(a>0,b>0)$
11	$\mathbb{A}_{3,8}\oplus\mathbb{A}_1$	$c_{1,2}^3=-a$, $c_{1,3}^2=-b$, $c_{1,4}^2=bg$, $c_{1,4}^3=af$, $c_{2,3}^1=c$, $c_{2,4}^1=-cg$, $c_{2,4}^3=-ad$, $c_{3,4}^1=cf$, $c_{3,4}^2=-bd$ $(a>0,b>0,c>0)$
12	$\mathbb{A}_{3,9}\oplus\mathbb{A}_1$	$c_{1,2}^3=a$, $c_{1,3}^2=-b$, $c_{1,4}^2=bg$, $c_{1,4}^3=-af$, $c_{2,3}^1=c$, $c_{2,4}^1=-cg$, $c_{2,4}^3=ad$, $c_{3,4}^1=cf$, $c_{3,4}^2=-bd$ $(a>0,b>0,c>0)$
13	$\mathbb{A}_{4,1}$	$c_{2,4}^1=a$, $c_{3,4}^1=b$, $c_{3,4}^2=c$ $(a>0,c>0)$
14	$\mathbb{A}_{4,2}^{\beta}$	$c_{1,4}^1=a\beta$, $c_{2,4}^1=(1-\beta)ad$, $c_{2,4}^2=c_{3,4}^3=a$, $c_{3,4}^1=((1-\beta)e+d)ac$, $c_{3,4}^2=ac$ $(a>0,c>0)$
15	$\mathbb{A}_{4,3}$	$c_{1,4}^1=a$, $c_{2,4}^1=b$, $c_{3,4}^1=c$, $c_{3,4}^2=d$ $(a>0,d>0)$
16	$\mathbb{A}_{4,4}$	$c_{1,4}^1=c_{2,4}^2=c_{3,4}^3=a$, $c_{2,4}^1=b$, $c_{3,4}^1=c$, $c_{3,4}^2=d$ $(a>0,b>0,d>0)$
17	$\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1=a$, $c_{2,4}^1=ab(\alpha-1)$, $c_{2,4}^2=\alpha a$, $c_{3,4}^1=a(bd(\alpha-1)+c(\beta-1))$, $c_{3,4}^2=ad(\alpha-\beta)$, $c_{3,4}^3=\beta a$ $(a>0)$
18	$\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1=\alpha a$, $c_{2,4}^1=(c(\beta-\alpha)-d)a$, $c_{2,4}^2=c_{3,4}^3=\beta a$, $c_{2,4}^3=-\frac{a^2}{b}$, $c_{3,4}^1=(d(\beta-\alpha)+c)b$, $c_{3,4}^2=b$ $(a>0,b>0)$
19	$\mathbb{A}_{4,7}$	$c_{1,4}^1=2a$, $c_{2,4}^2=c_{3,4}^3=a$, $c_{2,3}^1=b$, $c_{2,4}^1=c$, $c_{3,4}^1=d$, $c_{3,4}^2=e$ $(a>0,b>0,e>0)$
20	$\mathbb{A}_{4,8}$	$c_{2,3}^1=a$, $c_{2,4}^1=b$, $c_{2,4}^2=c$, $c_{3,4}^1=d$, $c_{3,4}^2=e$, $c_{3,4}^3=-c$ $(a>0,c>0)$
21	$\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$	$c_{1,4}^1=a(\beta+1)$, $c_{2,3}^1=b$, $c_{2,4}^1=c$, $c_{2,4}^2=a$, $c_{3,4}^1=d$, $c_{3,4}^2=f(\beta-1)$, $c_{3,4}^3=a\beta$ $(a>0,b>0)$
22	$\mathbb{A}_{4,10}$	$c_{2,3}^1=a$, $c_{2,4}^1=b$, $c_{2,4}^3=-c$, $c_{3,4}^1=d$, $c_{3,4}^2=f$ $(a>0,c>0,f>0)$
23	$\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$	$c_{1,4}^1=2a\alpha$, $c_{2,3}^1=b$, $c_{2,4}^1=c$, $c_{2,4}^2=c_{3,4}^3=a\alpha$, $c_{2,4}^3=-\frac{a}{f}$, $c_{3,4}^1=d$, $c_{3,4}^2=af$ $(a>0,b>0,f>0)$
24	$\mathbb{A}_{4,12}$	$c_{1,3}^1=c_{2,3}^2=a$, $c_{1,4}^1=c_{2,4}^2=b$, $c_{1,4}^2=-c$, $c_{2,4}^1=d$, $c_{3,4}^1=f$, $c_{3,4}^2=g$ $(a>0,c>0,d>0)$

Теорема 2.2. *Четырехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи тогда и только тогда, когда соответствующая алгебра Ли содержится в таб-*

лице 2.2.

Таблица 2.2: Нетривиальные алгебраические солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой

Алг. Ли	Стр. конст.	$D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$	Λ
$\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$	$c_{2,3}^1 = a, a > 0$	$\mathrm{diag}(2a^2, a^2, a^2, \frac{3}{2}a^2)$	$-\frac{3}{2}a^2$
$\mathbb{A}_{3,4} \oplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = -c_{2,3}^2 = a,\ a > 0$	$\mathrm{diag}(2a^2, 2a^2, 0, 2a^2)$	$-2a^2$
$\mathbb{A}_{3,5}^{\alpha} \oplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = a,\ c_{2,3}^2 = \alpha a,\ a > 0$	$\mathrm{diag}(a^2\alpha(\alpha-1),$ $a^2(1-\alpha), 0,\ a^2(\alpha^2+1))$	$-a^2(\alpha^2+1)$
$\mathbb{A}_{4,1}$	$c_{2,4}^1 = c_{3,4}^2 = a,\ a > 0$	$\mathrm{diag}(2a^2, \frac{3}{2}a^2, a^2, \frac{1}{2}a^2)$	$-\frac{3}{2}a^2$
$\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1 = a,\ c_{2,4}^2 = \alpha a,\ c_{3,4}^3 = \beta a,\ a > 0$	$\mathrm{diag}(\ a^2(\alpha^2+\beta^2-\alpha-\beta),$ $a^2(1-\alpha\beta+\beta^2-\alpha),$ $a^2(\alpha^2-\alpha\beta-\beta+1), 0)$	$-a^2(\alpha^2+\beta^2+1)$
$\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1 = \alpha a,\ c_{2,4}^3 = -a,\ c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = \beta a,$ $c_{3,4}^2 = a,\ a > 0$	$\mathrm{diag}(2a^2\beta(\beta-\alpha),$ $a^2\alpha(\alpha-\beta),\ a^2\alpha(\alpha-\beta), 0)$	$-a^2(\alpha^2+2\beta^2)$
$\mathbb{A}_{4,8}$	$c_{2,3}^1 = a,\quad c_{2,4}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a,\quad c_{3,4}^3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}a,$ $a > 0$	$\mathrm{diag}(2a^2, a^2, a^2, 0)$	$-\frac{3}{2}a^2$
$\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$	$c_{1,4}^1 = a(\beta+1),\quad c_{3,4}^3 = a\beta,\quad c_{2,4}^2 = a,$ $c_{2,3}^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}a\sqrt{\beta^2+\beta+1},\ a > 0$	$\mathrm{diag}(\frac{2}{3}a^2(\beta-1)^2,$ $\frac{2}{3}a^2(2\beta+1)(\beta-1),$ $\frac{2}{3}a^2(\beta+2)(1-\beta), 0)$	$-2a^2(\beta^2+\beta+1)$

Заметим, что матрица дифференцирования $D \in Der(\mathfrak{g})$ в уравнении (1.7) является симметричной в силу симметрии матрицы оператора Риччи. Поэтому для алгебры Ли каждого типа достаточно описать все дифференцирования с симметричными матрицами, и далее исследовать (1.7). В результате получим уравнения, левые части которых являются многочленами от структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Мы будем использовать обобщенные базисы Дж. Милнора этих алгебр Ли, приведенные в теореме 2.1. Для доказательства теоремы 2.2 последовательно рассмотрим все четырехмерные действительные метрические алгебры Ли.

Метрическая алгебра Ли $4\mathbb{A}_1$.

Поскольку метрическая алгебра Ли $4\mathbb{A}_1$ — абелева, то для произвольного скалярного произведения соответствующая ей группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой является многообразием Эйнштейна с нулевой константой. Таким образом, мы получаем следующее очевидное

Предложение 2.1. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $4\mathbb{A}_1$, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Метрическая алгебра Ли $2\mathbb{A}_2$.

Лемма 2.1. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $2\mathbb{A}_2$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 \end{pmatrix} \mid cz_1 = 0, b(z_1 - z_2) = 0, fz_2 = 0 \right\}.$$

Доказательство. Запишем в обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $2\mathbb{A}_2$ систему (1.2) для определения матриц дифференцирований D, дополнительно наложив на них условие симметричности:

$$aD_1^2 = 0,$$
$$aD_1^1 - abD_2^4 - afD_1^4 + cD_2^3 - dD_1^3 = 0,$$
$$aD_2^3 = 0,$$
$$aD_2^4 = 0,$$
$$fgD_1^4 + cD_1^2 = 0,$$
$$aD_2^3 - abD_3^4 - bdD_1^4 - bgD_1^4 - cfD_1^4 + cD_1^1 - cD_2^2 + cD_3^3 + dD_1^2 = 0,$$
$$cD_2^3 = 0,$$
$$cD_2^4 + gD_1^4 = 0,$$
$$fgD_2^4 + dD_1^2 = 0,$$
$$afD_3^4 - bdD_2^4 - bgD_2^4 - cfD_2^4 - aD_1^3 + cD_1^2 + dD_3^3 = 0,$$
$$dD_2^3 = 0,$$
$$(d+g)D_2^4 = 0,$$
$$abD_1^2 + fgD_1^3 = 0,$$
$$abD_2^2 - abD_1^1 - abD_4^4 + afD_1^2 + bdD_1^3 + bgD_1^3 + cfD_1^3 + aD_2^4 + cD_3^4 = 0,$$

$$abD_2^3 = 0,$$
$$abD_2^4 + gD_1^3 = 0,$$
$$f(aD_1^2 - gD_2^3) = 0,$$
$$afD_4^4 - abD_1^2 + bdD_2^3 + bgD_2^3 + cfD_2^3 - aD_1^4 + dD_3^4 = 0,$$
$$D_2^3 af = 0,$$
$$afD_2^4 - gD_2^3 = 0,$$
$$fgD_3^3 - bdD_1^2 - bgD_1^2 - cfD_1^2 - fgD_1^1 + fgD_4^4 - gD_1^4 = 0,$$
$$afD_2^3 - abD_1^3 + (cf + bg + bd)(D_3^3 + D_4^4 - D_2^2) \\ - fgD_1^2 - cD_1^4 - dD_2^4 - gD_2^4 = 0,$$
$$bdD_2^3 + bgD_2^3 + cfD_2^3 + fgD_1^3 + gD_3^4 = 0,$$
$$gD_3^3 - bdD_2^4 - bgD_2^4 - cfD_2^4 - fgD_1^4 = 0.$$

Т.к. $a > 0$, $g > 0$, то из первого, третьего и четвертого уравнения системы получаем $D_1^2 = D_2^3 = D_2^4 = 0$. Но тогда восьмое и тринадцатое уравнения дадут $D_1^3 = D_1^4 = 0$, а из предпоследнего уравнения получим $D_3^4 = 0$. Система примет более простой вид:

$$aD_1^1 = 0,$$
$$c(D_1^1 - D_2^2 + D_3^3) = 0,$$
$$dD_3^3 = 0,$$
$$ab(D_1^1 - D_2^2 + D_4^4) = 0,$$
$$afD_4^4 = 0,$$
$$fg(D_1^1 - D_3^3 - D_4^4) = 0,$$
$$(cf + bg + bd)(D_3^3 + D_4^4 - D_2^2) = 0,$$
$$gD_3^3 = 0.$$

Снова учитывая $a > 0$, $g > 0$, из первого и последнего уравнений получим $D_1^1 = D_3^3 = 0$. Обозначая $z_1 = D_2^2$, $z_2 = D_4^4$, получим требуемый вид симметричных матриц дифференцирований D при выполнении дополнительных условий:

$$cz_1 = 0, \quad b(z_1 - z_2) = 0, \quad fz_2 = 0.$$

■

Замечание. *Так как вычисления, приведенные в доказательстве леммы 2.1, аналогичны для других четырехмерных метрических алгебр Ли, то в дальнейшем будем приводить общий вид симметричных матриц дифференцирований без доказательства.*

Предложение 2.2. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $2\mathbb{A}_2$, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. Так как $D \neq 0$ (иначе алгебраический солитон Риччи тривиален), то, в силу дополнительных условий на матрицу D, приведенных в лемме 2.1, возможны три случая: либо $z_1 = 0$, $b = f = 0$; либо $z_2 = 0$, $b = c = 0$; либо $c = f = 0$.

Пусть $z_1 = 0$, $b = f = 0$. Система (1.7) примет вид:

$$\begin{gathered}
2a^2 + c^2 + 2\Lambda = 0, \\
2cd - cg = 0, \\
2a^2 - c^2 + 2d^2 - 2dg + 2\Lambda = 0, \\
ad = 0, \\
ac = 0, \\
c^2 + 2d^2 + 2g^2 + 2\Lambda = 0, \\
dg - g^2 - \Lambda + z_2 = 0.
\end{gathered}$$

С учетом ограничения на структурные константы $a > 0$, четвертое и пятое уравнение системы дадут $c = d = 0$. Тогда система примет вид:

$$\begin{gathered}
a^2 + \Lambda = 0, \\
g^2 + \Lambda = 0, \\
g^2 + \Lambda + z_2 = 0.
\end{gathered}$$

Но отсюда немедленно следует $z_2 = 0$, а значит $D = 0$ — алгебраический солитон тривиален.

Пусть $z_2 = 0$, $b = c = 0$. Система (1.7) примет вид:

$$f^2g^2 - 2a^2 - 2\Lambda = 0,$$
$$a^2f^2 + a^2 + d^2 - dg + \Lambda + z_1 = 0,$$
$$a(f^2g - 2d) = 0,$$
$$f^2g^2 + 2d^2 + 2g^2 + 2\Lambda = 0,$$
$$2a^2f + dfg = 0,$$
$$af(2d + g) = 0,$$
$$2a^2f^2 + f^2g^2 - 2dg + 2g^2 + 2\Lambda = 0.$$

Из третьего уравнения заключаем, что $d = \frac{1}{2}f^2g$. Тогда пятое уравнение примет вид

$$f(f^2g^2 + 4a^2) = 0,$$

что, с учетом $a > 0$, $g > 0$ дает $f = 0$. Система примет вид:

$$a^2 + \Lambda = 0,$$
$$g^2 + \Lambda = 0,$$
$$a^2 + \Lambda + z_1 = 0.$$

Но отсюда немедленно следует $z_1 = 0$, а значит $D = 0$ — алгебраический солитон тривиален.

Пусть $c = f = 0$. Система (1.7) примет вид:

$$a^2b^2 + 2a^2 + 2\Lambda = 0,$$
$$a^2b^2 + b^2d^2 + 2b^2dg + b^2g^2 - 2a^2 - 2d^2 + 2dg - 2\Lambda - 2z_1 = 0,$$
$$a(b^2d + b^2g + 2d) = 0,$$
$$b^2d^2 + 2b^2dg + b^2g^2 + 2d^2 + 2g^2 + 2\Lambda = 0,$$
$$a^2b + bd^2 + bdg = 0,$$
$$a^2b^2 + b^2d^2 + 2b^2dg + b^2g^2 - 2dg + 2g^2 + 2\Lambda + 2z_2 = 0.$$

Из третьего уравнения выразим $d = -\frac{b^2 g}{b^2+2}$ и подставим в пятое уравнение системы:

$$\frac{b(a^2(b^2+2)^2 - 2b^2 g^2)}{(b^2+2)^2} = 0.$$

Пусть $b \neq 0$, тогда $g^2 = \frac{a^2(b^2+2)^2}{2b^2}$ и разность первого и четвертого уравнений примет вид:

$$\frac{a^2(b^2+2)^2}{b^2} = 0,$$

что противоречит условию $a > 0$.

Пусть $b = 0$, а значит из третьего уравнения получаем $d = 0$. Система примет вид:

$$a^2 + \Lambda = 0, \quad a^2 + \Lambda + z_1 = 0, \quad g^2 + \Lambda = 0, \quad g^2 + \Lambda + z_2 = 0.$$

Но отсюда немедленно следует $z_1 = z_2 = 0$, а значит $D = 0$ — алгебраический солитон тривиален. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$.

Лемма 2.2. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & z_3 \\ 0 & 0 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \mid bz_3 = 0, b(z_1 - z_4) = 0 \right\}.$$

Предложение 2.3. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$ система (1.7) примет вид:

$$2a^2 + b^2 + 2\Lambda = 0,$$

$$2a^2 + b^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$

$$\Lambda + z_2 = 0,$$

$$z_3 = 0,$$
$$b^2 - 2\Lambda - 2z_4 = 0.$$

Эта система, с учетом дополнительных условий, приведенных в лемме 2.2, очевидно имеет единственное решение

$$z_1 = z_3 = 0, \quad z_2 = z_4 = a^2, \quad \Lambda = -a^2, \quad b = 0,$$

соответствующее тривиальному алгебраическому солитону Риччи. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$.

Лемма 2.3. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 + z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & z_2 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 \end{pmatrix} \mid z_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Предложение 2.4. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$, любая левоинвариантная риманова метрика является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$ система (1.7) примет вид:

$$a^2 - 2\Lambda - 2z_1 - 2z_3 = 0,$$
$$a^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$
$$z_2 = 0,$$
$$a^2 + 2\Lambda + 2z_3 = 0,$$
$$\Lambda + z_4 = 0.$$

Эта система, очевидно, имеет единственное нетривиальное решение

$$z_2 = 0, \quad z_1 = z_3 = a^2, \quad z_4 = \frac{3}{2}a^2 \quad \Lambda = -\frac{3}{2}a^2,$$

которое верно для любых значений a. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{3,2} \oplus \mathbb{A}_1$.

Лемма 2.4. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли* $\mathbb{A}_{3,2} \oplus \mathbb{A}_1$ *матрицы симметричных дифференцирований* D *имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 \end{pmatrix} \mid c(z_1 - z_2) = 0, d(z_1 - z_2) = 0 \right\}.$$

Предложение 2.5. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли* $\mathbb{A}_{3,2} \oplus \mathbb{A}_1$*, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{3,2} \oplus \mathbb{A}_1$ система (1.7) примет вид:

$$4a^2 - b^2 - c^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$
$$2ab - cd = 0,$$
$$4a^2 + b^2 - d^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$
$$4a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\Lambda = 0,$$
$$ac = 0,$$
$$3ad + bc = 0,$$
$$c^2 + d^2 + 2\Lambda + 2z_2 = 0.$$

С учетом ограничения $a > 0$ из пятого уравнения получаем $c = 0$, но тогда второе уравнение системы дает $ab = 0$, что противоречит ограничениям на структурные константы. Система (1.7) в случае метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{3,2} \oplus \mathbb{A}_1$ решений не имеет. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$.

Лемма 2.5. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли*

$\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$ *матрицы симметричных дифференцирований* D *имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & 0 & 0 \\ z_2 & z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 \end{pmatrix} \mid b(z_1 - z_4) = 0, z_2 b = 0 \right\}.$$

Предложение 2.6. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли* $\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$*, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{3,3} \oplus \mathbb{A}_1$ система (1.7) примет вид:

$$4a^2 - b^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$

$$z_2 = 0,$$

$$2a^2 + \Lambda + z_3 = 0,$$

$$4a^2 + b^2 + 2\Lambda = 0,$$

$$ab = 0,$$

$$b^2 + 2\Lambda + 2z_4 = 0.$$

С учетом ограничения $a > 0$ предпоследнее уравнение системы дает $b = 0$, что соответствует тривиальному солитону Риччи. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{3,4} \oplus \mathbb{A}_1$.

Лемма 2.6. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли* $\mathbb{A}_{3,4} \oplus \mathbb{A}_1$ *матрицы симметричных дифференцирований* D *имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} \mid c(z_1 - z_2) = 0, d(z_1 - z_3) = 0, b(z_2 - z_3) = 0 \right\}.$$

Предложение 2.7. *Левоинвариантная метрика на группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли* $\mathbb{A}_{3,4} \oplus \mathbb{A}_1$*, является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи тогда и только тогда, когда в обобщенном* *базисе Дж. Милнора структурные константы алгебры Ли удовлетворяют условию $b = c = d = 0$.*

Доказательство. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{3,4} \oplus \mathbb{A}_1$ система (1.7) примет вид:

$$c^2 + d^2 - 2\Lambda - 2z_1 = 0,$$

$$2ac - bd = 0,$$

$$b^2 - c^2 - 2\Lambda - 2z_2 = 0,$$

$$4a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\Lambda = 0,$$

$$ad = 0,$$

$$ab - cd = 0,$$

$$b^2 + d^2 + 2\Lambda + 2z_3 = 0.$$

С учетом ограничения $a > 0$ из пятого уравнения получаем $d = 0$, далее второе и шестое уравнения дают $b = c = 0$. Система примет вид:

$$\Lambda + z_1 = 0, \quad \Lambda + z_2 = 0, \quad 2a^2 + \Lambda = 0, \quad \Lambda + z_3 = 0.$$

Она очевидно имеет единственное нетривиальное решение:

$$z_1 = z_2 = z_3 = 2a^2, \quad \Lambda = -2a^2.$$

■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{3,5}^{\alpha} \oplus \mathbb{A}_1$, $0 < |\alpha| < 1$.

Лемма 2.7. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{3,5}^{\alpha} \oplus \mathbb{A}_1$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} \mid c(z_1 - z_2) = 0, d(z_1 - z_3) = 0, b(z_2 - z_3) = 0 \right\}.$$

Предложение 2.8. *Левоинвариантная метрика на группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $\mathbb{A}_{3,5}^{\alpha} \oplus \mathbb{A}_1$, является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи тогда и только тогда, когда в обобщенном* *базисе Дж. Милнора структурные константы алгебры Ли удовлетворяют условию $b = c = d = 0$.*

Доказательство. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{3,5}^{\alpha} \oplus \mathbb{A}_1$ система (1.7) примет вид:

$$2a^2\alpha + 2a^2 - c^2 - d^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$
$$2ac - bd = 0,$$
$$2a^2\alpha^2 + 2a^2\alpha - b^2 + c^2 + 2\Lambda + 2z_2 = 0,$$
$$2a^2\alpha^2 + 2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\Lambda = 0,$$
$$ad(\alpha + 2) = 0,$$
$$2a\alpha b + ab + cd = 0,$$
$$b^2 + d^2 + 2\Lambda + 2z_3 = 0.$$

С учетом ограничений $a > 0$, $0 < |\alpha| < 1$ из пятого уравнения получаем $d = 0$, далее второе дает $c = 0$. Шестое уравнение системы дает два случая: либо $b = 0$; либо $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Пусть $b = 0$, тогда система примет вид:

$$z_1 = -a^2(\alpha + 1) - \Lambda, z_2 = -a^2\alpha(\alpha + 1) - \Lambda, a^2(\alpha^2 + 1) + \Lambda = 0, z_3 = -\Lambda.$$

Она очевидно имеет единственное нетривиальное решение:

$$z_1 = a^2\alpha(\alpha - 1), z_2 = a^2(1 - \alpha), z_3 = a^2(\alpha^2 + 1), \quad \Lambda = -a^2(\alpha^2 + 1).$$

Пусть $\alpha = -\frac{1}{2}$, тогда из условия $b(z_2 - z_3) = 0$ леммы 2.7 следует

$$b(a^2 + 4b^2) = 0,$$

а значит $b = 0$, что приводит нас к предыдущему случаю. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$.

Лемма 2.8. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли*

$\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$ *матрицы симметричных дифференцирований* D *имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 \end{pmatrix} \mid c(z_1 - z_2) = 0, d(z_1 - z_2) = 0 \right\}.$$

Предложение 2.9. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли* $\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$*, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$ система (1.7) примет вид:

$$a^2 - b^2 - c^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$

$$dc = 0,$$

$$a^2 - b^2 + d^2 - 2\Lambda - 2z_1 = 0,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + c^2 + d^2 + 2\Lambda = 0,$$

$$da = 0,$$

$$cb = 0,$$

$$c^2 + d^2 + 2\Lambda + 2z_2 = 0.$$

С учетом ограничений $a > 0$, $b > 0$ из пятого и шестого уравнений получим $c = d = 0$. Но тогда сумма первого и третьего уравнений дают $a = b$, что соответствует многообразию Эйнштейна с константой равной нулю, а значит тривиальному алгебраическому солитону Риччи. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{3,7}^{\alpha} \oplus \mathbb{A}_1$, $\alpha > 0$.

Лемма 2.9. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли* $\mathbb{A}_{3,7}^{\alpha} \oplus \mathbb{A}_1$ *матрицы симметричных дифференцирований* D *имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 \end{pmatrix} \mid (z_1 - z_2)(\alpha d + bc) = 0, (\alpha bc - d)(z_1 - z_2) = 0 \right\}.$$

Предложение 2.10. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли* $\mathbb{A}^{\alpha}_{3,7} \oplus \mathbb{A}_1$, *нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}^{\alpha}_{3,7} \oplus \mathbb{A}_1$ система (1.7) примет вид:

$$
\begin{gathered}
4a^2\alpha^2b^2 - a^2b^4 - \alpha^2b^2d^2 - 2\alpha b^3cd - b^4c^2 + 2b^2\Lambda + 2b^2z_1 + a^2 = 0,\\
2a^2\alpha b^2 - \alpha^2bcd - \alpha b^2c^2 - 2a^2\alpha + \alpha d^2 + bcd = 0,\\
4a^2\alpha^2b^2 + a^2b^4 - \alpha^2b^2c^2 + 2\alpha bcd + 2b^2\Lambda + 2b^2z_1 - a^2 - d^2 = 0,\\
(4\alpha^2b^2 + (b^2-1)^2)a^2 + \alpha^2b^2(c^2+d^2) + 2\alpha b^3cd + b^4c^2\\
\qquad\qquad - 2\alpha bcd + 2\Lambda b^2 + d^2 = 0,\\
a(3\alpha^2b^2d + 3\alpha b^3c - \alpha bc + d) = 0,\\
a(3\alpha^2bc + \alpha b^2d + b^3c - 3\alpha d) = 0,\\
\alpha^2b^2c^2 + \alpha^2b^2d^2 + 2\alpha b^3cd + b^4c^2 - 2\alpha bcd + 2b^2\Lambda + 2b^2z_2 + d^2 = 0.
\end{gathered}
$$

Из пятого уравнения системы выразим $d = \frac{\alpha bc(1-3b^2)}{3\alpha^2b^2+1}$ и подставим в шестое уравнение системы:

$$b^3c(9\alpha^2+1)(\alpha^2+1) = 0.$$

Т.к. $b > 0$, то $c = d = 0$. Тогда, с учетом $a > 0$, $\alpha > 0$, из второго уравнения системы получаем $b = 1$, что соответствует тривиальному алгебраическому солитону Риччи. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{3,8} \oplus \mathbb{A}_1$.

Лемма 2.10. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли* $\mathbb{A}_{3,8} \oplus \mathbb{A}_1$ *матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*

$$
D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 & 0\\ 0 & 0 & z_2 & 0\\ z_1 & z_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} z_1(a-c)=0, & z_2(a-b)=0,\\ bdz_1 + afz_2 = bgz_3, & adz_1 + cfz_2 = cgz_3,\\ gz_2 = fz_3, & gz_1 = dz_3 \end{matrix} \right\}.
$$

Предложение 2.11. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли* $\mathbb{A}_{3,8} \oplus \mathbb{A}_1$*, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{3,8} \oplus \mathbb{A}_1$ система (1.7) примет вид:

$$a^2f^2 + b^2g^2 - c^2f^2 - c^2g^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2\Lambda = 0,$$
$$fd(a^2 - bc) = 0,$$
$$a^2d^2 - b^2d^2 - b^2g^2 + c^2g^2 + a^2 + 2ac - b^2 + c^2 + 2\Lambda = 0,$$
$$acdg + b^2dg - 2z_1 = 0,$$
$$abfg + c^2fg - 2z_2 = 0,$$
$$a^2d^2 + a^2f^2 - b^2d^2 - c^2f^2 + a^2 - b^2 + 2bc - c^2 - 2\Lambda = 0,$$
$$d(a+b)^2 = 0,$$
$$f(a+c)^2 = 0,$$
$$g(c-b)^2 = 0,$$
$$a^2d^2 + a^2f^2 + 2abd^2 + 2acf^2 + b^2d^2 + b^2g^2 - 2bcg^2 + c^2f^2 + c^2g^2 + 2\Lambda + 2z_3 = 0.$$

Т.к. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то из седьмого и восьмого уравнений следует, что $d = f = 0$. Девятое уравнение системы дает нам два случая: либо $g = 0$; либо $b = c$.

Пусть $g = 0$. Тогда разность первого и третьего уравнений дает

$$(b-c)(a+b+c) = 0,$$

откуда, с учетом $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, получаем $b = c$. Далее сумма третьего и шестого уравнений принимают вид:

$$a(a+c) = 0,$$

что противоречит ограничениям на структурные константы.

Пусть $b = c$. Тогда сумма третьего и шестого уравнений принимают вид:

$$a(a+c) = 0,$$

что снова противоречит ограничениям на структурные константы. Система (1.7) в случае метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{3,8} \oplus \mathbb{A}_1$ решений не имеет. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{3,9} \oplus \mathbb{A}_1$.

Лемма 2.11. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{3,9} \oplus \mathbb{A}_1$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 \end{pmatrix} \mid z_1 g = 0, z_1 f = 0, z_1 d = 0 \right\}.$$

Предложение 2.12. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $\mathbb{A}_{3,9} \oplus \mathbb{A}_1$, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. Так как $D \neq 0$ (иначе алгебраический солитон Риччи тривиален), то, в силу дополнительных условий на матрицу D, приведенных в лемме 2.11, необходимо выполняется $d = g = f = 0$. Система (1.7) примет вид:

$$\begin{gathered} a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + 2\Lambda = 0, \\ a^2 - 2ac - b^2 + c^2 + 2\Lambda = 0, \\ a^2 - b^2 + 2bc - c^2 - 2\Lambda = 0, \\ \Lambda + z_1 = 0. \end{gathered}$$

Данная система, очевидно имеет единственное решение

$$a = b = c, \quad z_1 = -\frac{1}{2}a^2, \quad \Lambda = \frac{1}{2}a^2,$$

соответствующее тривиальному алгебраическому солитону Риччи. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,1}$.

Лемма 2.12. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли*

$\mathbb{A}_{4,1}$ *матрицы симметричных дифференцирований* D *имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 + 2z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 + z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 \end{pmatrix} \mid z_2 b = 0 \right\}.$$

Предложение 2.13. *Левоинвариантная метрика на группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли* $\mathbb{A}_{4,1}$*, является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи тогда и только тогда, когда в обобщенном базисе Дж. Милнора структурные константы алгебры Ли удовлетворяют условиям* $a = c$*,* $b = 0$*.*

Доказательство. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,1}$ система (1.7) примет вид:

$$\begin{gathered} a^2 + b^2 - 2\Lambda - 2z_1 - 4z_2 = 0, \\ cb = 0, \\ a^2 - c^2 + 2\Lambda + 2z_1 + 2z_2 = 0, \\ ab = 0, \\ b^2 + c^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2\Lambda + 2z_2 = 0. \end{gathered}$$

Т.к. $c > 0$, то из второго уравнения получаем $b = 0$. Далее, вычитая из удвоенного третьего уравнения первое и пятое, получаем $a = c$. Система примет вид:

$$2\Lambda + 2z_1 + 4z_2 = a^2, \Lambda + z_1 + z_2 = 0, a^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0, a^2 + \Lambda + z_2 = 0.$$

Данная система очевидно имеет единственное нетривиальное решение:

$$z_1 = a^2, \quad z_2 = \frac{1}{2}a^2, \quad \Lambda = -\frac{3}{2}a^2.$$

■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,2}^{\beta}$, $\beta \neq 0$.

Лемма 2.13. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,2}^{\beta}$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*
При $\beta \neq 1$:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid d(z_1 - z_2) = 0, c((\beta - 1)e - d)(z_1 - z_2) = 0 \right\}.$$

При $\beta = 1$:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & 0 & 0 \\ z_2 & z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dz_2 + z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c(d^2 z_2 - dz_1 + dz_3 - z_2) = 0 \right\}.$$

Предложение 2.14. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $\mathbb{A}_{4,2}^{\beta}$, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. Пусть $\beta \neq 1$. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,2}^{\beta}$ система (1.7) примет вид:

$$\begin{gathered}
a^2\beta^2c^2e^2 - 2a^2\beta c^2de - 2a^2\beta c^2e^2 + a^2\beta^2d^2 + a^2c^2d^2 + 2a^2c^2de \\
+ a^2c^2e^2 - 2a^2\beta d^2 - 2a^2\beta^2 + a^2d^2 - 4a^2\beta - 2\Lambda - 2z_1 = 0, \\
a^2(\beta c^2e - 2\beta^2d - c^2d - c^2e + \beta d + d) = 0, \\
a^2\beta^2d^2 - 2a^2\beta d^2 - a^2c^2 + a^2d^2 + 2a^2\beta + 4a^2 + 2\Lambda + 2z_2 = 0, \\
a^2c(2\beta + 1)(\beta e - d - e) = 0, \\
a^2c(\beta^2de - \beta d^2 - 2\beta de + d^2 + de + \beta + 2) = 0, \\
a^2\beta^2c^2e^2 - 2a^2\beta c^2de - 2a^2\beta c^2e^2 + a^2c^2d^2 + 2a^2c^2de + a^2c^2e^2 + a^2c^2 \\
+ 2a^2\beta + 4a^2 + 2\Lambda + 2z_2 = 0, \\
a^2\beta^2c^2e^2 - 2a^2\beta c^2de - 2a^2\beta c^2e^2 + a^2\beta^2d^2 + a^2c^2d^2 + 2a^2c^2de \\
+ a^2c^2e^2 - 2a^2\beta d^2 + 2a^2\beta^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + 4a^2 + 2\Lambda = 0.
\end{gathered}$$

Рассмотрим четвертое уравнение системы. Оно с учетом условий $a > 0$, $c > 0$ дает два случая: либо $\beta = -\frac{1}{2}$; либо $d = e(\beta - 1)$.
Пусть $\beta = -\frac{1}{2}$. Тогда второе уравнение системы дает $d = -\frac{3}{2}e$. Но тогда пятое уравнение примет вид $a^2c = 0$, что противоречит условиям на структурные константы.
Пусть $d = e(\beta - 1)$. Тогда второе и пятое уравнения системы примут вид

$$a^2e(2\beta^3 - 3\beta^2 + 1) = 0, \quad a^2c(\beta + 2) = 0,$$

а значит $e = 0$, $\beta = -2$. Но тогда разность третьего и шестого уравнений дадут $a^2c^2 = 0$, что противоречит условиям на структурные константы.

Пусть $\beta = 1$. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,2}^1$ система (1.7) примет вид:

$$\begin{gathered}
a^2c^2d^2 - 6a^2 - 2\Lambda - 2z_1 = 0,\\
a^2c^2d - 2z_2 = 0,\\
a^2c^2 - 6a^2 - 2\Lambda - 2z_3 = 0,\\
a^2dc = 0,\\
a^2c = 0,\\
a^2c^2d^2 + a^2c^2 + 6a^2 + 2dz_2 + 2\Lambda + 2z_3 = 0,\\
a^2c^2d^2 + a^2c^2 + 6a^2 + 2\Lambda = 0.
\end{gathered}$$

Пятое уравнение системы противоречит ограничениям на структурные константы.

Система (1.7) в случае метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,2}^{\beta}$ решений не имеет. ∎

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,3}$.

Лемма 2.14. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,3}$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b(z_1 - z_2) = 0, c(z_1 - z_2) = 0 \right\}.$$

Предложение 2.15. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $\mathbb{A}_{4,3}$, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,3}$ система (1.7) примет вид:

$$2a^2 - b^2 - c^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$
$$2ab - cd = 0,$$
$$b^2 - d^2 + 2\Lambda + 2z_2 = 0,$$
$$ac = 0,$$
$$ad + bc = 0,$$
$$c^2 + d^2 + 2\Lambda + 2z_2 = 0,$$
$$2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\Lambda = 0.$$

С учетом ограничения $a > 0$ из четвертого уравнения получаем $c = 0$, но тогда пятое уравнение дает $ad = 0$, что противоречит ограничениям на структурные константы. Система (1.7) в случае метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,3}$ решений не имеет. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,4}$.

Лемма 2.15. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,4}$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Предложение 2.16. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $\mathbb{A}_{4,4}$, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,4}$ система (1.7) примет вид:

$$\begin{gathered}
6a^2 - b^2 - c^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,\\
3ab - cd = 0,\\
6a^2 + b^2 - d^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,\\
ac = 0,\\
3ad + bc = 0,\\
6a^2 + c^2 + d^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,\\
6a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\Lambda = 0.
\end{gathered}$$

С учетом ограничения $a > 0$ из четвертого уравнения получаем $c = 0$, но тогда пятое уравнение дает $ad = 0$, что противоречит ограничениям на структурные константы. Система (1.7) в случае метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,4}$ решений не имеет. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$, $\alpha\beta \neq 0$, $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.

Лемма 2.16. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*
При $\alpha < \beta < 1$:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \middle| \ \begin{matrix} b(z_1 - z_2) = 0, \quad d(z_2 - z_3) = 0, \\ (bd(\alpha - 1) + c(\beta - 1))(z_1 - z_3) = 0 \end{matrix} \right\}.$$

При $\alpha = \beta < 1$:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & z_3 & 0 \\ 0 & z_3 & z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \middle| \ \begin{matrix} b(z_2 - z_1) + (bd + c)z_3 = 0, \\ (bd + c)(z_1 - z_4) - bz_3 = 0 \end{matrix} \right\}.$$

При $\alpha < \beta = 1$:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & -dz_2 & z_2 & 0 \\ -dz_2 & z_3 & -bz_2 & 0 \\ z_2 & -bz_2 & z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{c} d(b^2-1)z_2 + b(z_1 - z_3) = 0, \\ (b^2 - d^2)z_2 + bd(z_1 - z_4) = 0, \\ b(d^2-1)z_2 + d(z_4 - z_3) = 0 \end{array} \right\}.$$

При $\alpha = \beta = 1$:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & 0 \\ z_2 & z_4 & z_5 & 0 \\ z_3 & z_5 & z_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Предложение 2.17. *Левоинвариантная метрика на группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$, является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи тогда и только тогда, когда в обобщенном базисе Дж. Милнора структурные константы алгебры Ли удовлетворяют условию $b = c = d = 0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha < \beta < 1$. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ система (1.7) примет вид:

$$\begin{gathered} a^2\alpha^2b^2d^2 - 2a^2\alpha b^2d^2 + 2a^2\alpha b\beta cd + a^2\alpha^2b^2 - 2a^2\alpha bcd + a^2b^2d^2 - 2a^2b\beta cd \\ +a^2\beta^2c^2 - 2a^2\alpha b^2 + 2a^2bcd - 2a^2\beta c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 - 2a^2\alpha - 2a^2\beta - 2a^2 \\ \hfill -2\Lambda - 2z_1 = 0, \\ a^2(\alpha^2bd^2 - \alpha b\beta d^2 - \alpha bd^2 + \alpha\beta cd + b\beta d^2 - \beta^2cd - \alpha b\beta - \alpha cd + \beta cd \\ \hfill -2\alpha b + b\beta + 2b) = 0, \\ a^2\alpha^2b^2 - a^2\alpha^2d^2 + 2a^2\alpha\beta d^2 - a^2\beta^2d^2 - 2a^2\alpha b^2 + 2a^2\alpha^2 + 2a^2\alpha\beta + a^2b^2 \\ \hfill +2a^2\alpha + 2\Lambda + 2z_2 = 0, \\ a^2(\alpha+2)(\alpha bd - bd + \beta c - c) = 0, \\ a^2(\alpha^2b^2d - 2\alpha b^2d + \alpha b\beta c + 2\alpha^2d - \alpha bc - 2\alpha\beta d + b^2d - b\beta c \\ \hfill +\alpha d + bc - \beta d) = 0, \end{gathered}$$

$$a^2\alpha^2b^2d^2-2a^2\alpha b^2d^2+2a^2\alpha b\beta cd+a^2\alpha^2d^2-2a^2\alpha bcd-2a^2\alpha\beta d^2+a^2b^2d^2$$
$$-2a^2b\beta cd+a^2\beta^2c^2+a^2\beta^2d^2+2a^2bcd-2a^2\beta c^2+2a^2\alpha\beta+2a^2\beta^2+a^2c^2$$
$$+2a^2\beta+2\Lambda+2z_3=0,$$
$$a^2\alpha^2b^2d^2-2a^2\alpha b^2d^2+2a^2\alpha b\beta cd+a^2\alpha^2b^2+a^2\alpha^2d^2-2a^2\alpha bcd-2a^2\alpha\beta d^2$$
$$+a^2b^2d^2-2a^2b\beta cd+a^2\beta^2c^2+a^2\beta^2d^2-2a^2\alpha b^2+2a^2bcd-2a^2\beta c^2+2a^2\alpha^2$$
$$+a^2b^2+2a^2\beta^2+a^2c^2+2a^2+2\Lambda=0.$$

Из четвертого уравнения, с учетом $\beta<1$, выразим $c=-\frac{bd(\alpha-1)}{\beta-1}$ и подставим во второе уравнение:

$$(\beta+2)(\alpha-1)a^2b=0.$$

Так как $a>0$, $-1\leqslant\alpha<\beta<1$, то $b=0$. Пятое уравнение примет вид:

$$(2\alpha+1)(\alpha-\beta)a^2d=0.$$

С учетом ограничений на структурные константы и параметры алгебры Ли, получим два варианта: либо $d=0$; либо $\alpha=-\frac{1}{2}$.
Пусть $d=0$. Система примет вид:

$$a^2(\alpha+\beta+1)+\Lambda+z_1=0,\quad a^2\alpha(\alpha+\beta+1)+\Lambda+z_2=0,$$
$$a^2\beta(\alpha+\beta+1)+\Lambda+z_3=0,\quad a^2(\alpha^2+\beta^2+1)+\Lambda=0.$$

Данная система очевидно имеет единственное нетривиальное решение:

$$z_1=a^2(\alpha^2+\beta^2-\alpha-\beta),\quad z_2=-a^2(\alpha\beta-\beta^2+\alpha-1),$$
$$z_3=a^2(\alpha^2-\alpha\beta-\beta+1),\quad \Lambda=-a^2(\alpha^2+\beta^2+1).$$

Пусть $\alpha=-\frac{1}{2}$. Вычтем из третьего уравнения шестое и домножим на d:

$$da^2\left(\beta+\frac{1}{2}\right)^2(d^2+1)+d(z_2-z_3)=0,$$

что, с учетом дополнительных условий, приведенных в лемме 2.16, и ограничения $a>0$, дает $d=0$, что приводит нас к предыдущему случаю.

Пусть $\alpha=\beta<1$. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры

Ли $\mathbb{A}_{4,5}^{\beta,\beta}$ система (1.7) примет вид:

$$2a^2b^2\beta d^2 - a^2b^2\beta^2d^2 - 2a^2b\beta^2cd - a^2b^2\beta^2 - a^2b^2d^2 + 4a^2b\beta cd - a^2\beta^2c^2$$
$$+2a^2b^2\beta - 2a^2bcd + 2a^2\beta c^2 - a^2b^2 - a^2c^2 + 4a^2\beta + 2a^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$
$$a^2b(\beta+2)(\beta-1) = 0,$$
$$a^2b^2\beta^2 - 2a^2b^2\beta + a^2b^2 + 4a^2\beta^2 + 2a^2\beta + 2\Lambda + 2z_2 = 0,$$
$$a^2(\beta+2)(\beta-1)(bd+c) = 0,$$
$$a^2b^2\beta^2d - 2a^2b^2\beta d + a^2b\beta^2c + a^2b^2d - 2a^2b\beta c + a^2bc + 2z_3 = 0,$$
$$a^2b^2\beta^2d^2 - 2a^2b^2\beta d^2 + 2a^2b\beta^2cd + a^2b^2d^2 - 4a^2b\beta cd + a^2\beta^2c^2 + 2a^2bcd$$
$$-2a^2\beta c^2 + 4a^2\beta^2 + a^2c^2 + 2a^2\beta + 2\Lambda + 2z_4 = 0,$$
$$a^2b^2\beta^2d^2 - 2a^2b^2\beta d^2 + 2a^2b\beta^2cd + a^2b^2\beta^2 + a^2b^2d^2 - 4a^2b\beta cd + a^2\beta^2c^2$$
$$-2a^2b^2\beta + 2a^2bcd - 2a^2\beta c^2 + a^2b^2 + 4a^2\beta^2 + a^2c^2 + 2a^2 + 2\Lambda = 0.$$

Из второго и четвертого уравнений, с учетом $a > 0$, $-1 \leqslant \beta < 1$, имеем $b = c = 0$. Система примет вид:

$$a^2(2\beta+1) + \Lambda + z_1 = 0, \quad a^2\beta(2\beta+1) + \Lambda + z_2 = 0, \quad z_3 = 0,$$
$$a^2\beta(2\beta+1) + \Lambda + z_4 = 0, \quad a^2(2\beta^2+1) + \Lambda = 0.$$

Данная система очевидно имеет единственное нетривиальное решение:

$$z_1 = 2a^2\beta(\beta-1), \quad z_2 = z_4 = -a^2(\beta-1), \quad z_3 = 0, \quad \Lambda = -a^2(2\beta^2+1).$$

Пусть $\alpha < \beta = 1$. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,1}$ система (1.7) примет вид:

$$2a^2\alpha b^2d^2 - a^2\alpha^2b^2d^2 - a^2\alpha^2b^2 - a^2b^2d^2 + 2a^2\alpha b^2 - a^2b^2 + 2a^2\alpha$$
$$+ 4a^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$
$$2a^2\alpha bd^2 - a^2\alpha^2bd^2 - a^2bd^2 + 3a^2\alpha b - 3a^2b - 2dz_2 = 0,$$
$$a^2\alpha^2b^2 - a^2\alpha^2d^2 - 2a^2\alpha b^2 + 2a^2\alpha d^2 + 2a^2\alpha^2 + a^2b^2 - a^2d^2$$
$$+ 4a^2\alpha + 2\Lambda + 2z_3 = 0,$$
$$a^2\alpha^2bd + a^2\alpha bd - 2a^2bd + 2z_2 = 0,$$

$$a^2\alpha^2b^2d - 2a^2\alpha b^2d + 2a^2\alpha^2d + a^2b^2d - a^2\alpha d - a^2d - 2bz_2 = 0,$$

$$a^2\alpha^2b^2d^2 - 2a^2\alpha b^2d^2 + a^2\alpha^2d^2 + a^2b^2d^2 - 2a^2\alpha d^2 + a^2d^2 + 2a^2\alpha$$
$$+ 4a^2 + 2\Lambda + 2z_4 = 0,$$

$$a^2\alpha^2b^2d^2 - 2a^2\alpha b^2d^2 + a^2\alpha^2b^2 + a^2\alpha^2d^2 + a^2b^2d^2 - 2a^2\alpha b^2 - 2a^2\alpha d^2$$
$$+ 2a^2\alpha^2 + a^2b^2 + a^2d^2 + 4a^2 + 2\Lambda = 0.$$

Сумма второго и, умноженного на d, четвертого уравнения имеет вид:

$$a^2b(d^2+1)(\alpha-1) = 0,$$

что, с учетом $a > 0$, $-1 \leqslant \alpha < 1$, дает $b = 0$. Вычтем из третьего уравнения шестое и домножим на d:

$$-a^2d(\alpha-1)((\alpha-1)d^2 - \alpha - 2) + d(z_3 - z_4) = 0,$$

что, с учетом дополнительных условий, приведенных в лемме 2.16, и ограничений $a > 0$, $-1 \leqslant \alpha < 1$, дает $d = 0$. Система примет вид:

$$a^2(\alpha+2) + \Lambda + z_1 = 0, \quad a^2\alpha(\alpha+2) + \Lambda + z_3 = 0, \quad z_2 = 0,$$
$$a^2(\alpha+2) + \Lambda + z_4 = 0, \quad a^2(\alpha^2+2) + \Lambda = 0.$$

Данная система очевидно имеет единственное нетривиальное решение:

$$z_1 = z_4 = a^2\alpha(\alpha-1), \quad z_2 = 0, \quad z_3 = -2a^2(\alpha-1), \quad \Lambda = -a^2(\alpha^2+2).$$

Пусть $\alpha = \beta = 1$. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,5}^{1,1}$ система (1.7) примет вид:

$$3a^2 + \Lambda + z_1 = 0,$$
$$z_2 = 0,$$
$$3a^2 + \Lambda + z_4 = 0,$$
$$z_3 = 0,$$
$$z_5 = 0,$$
$$3a^2 + \Lambda + z_6 = 0,$$
$$3a^2 + \Lambda = 0.$$

Данная система очевидно имеет единственное решение:

$$z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = 0, \quad \Lambda = -3a^2,$$

соответствующее многообразию Эйнштейна, а значит тривиальному алгебраическому солитону Риччи. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \geqslant 0$.

Лемма 2.17. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{c} (z_1 - z_2)((\alpha-\beta)c + d) = 0, \\ (z_1 - z_2)((\alpha-\beta)d - c) = 0 \end{array} \right\}.$$

Предложение 2.18. *Левоинвариантная метрика на группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$, является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи тогда и только тогда, когда в обобщенном базисе Дж. Милнора структурные константы алгебры Ли удовлетворяют условиям $c = d = 0$, $a = b$.*

Доказательство. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$ система (1.7) примет вид:

$$\begin{aligned}
&2a^2\alpha\beta c^2 - a^2\alpha^2c^2 - a^2\beta^2c^2 - \alpha^2b^2d^2 + 2\alpha b^2\beta d^2 - b^2\beta^2d^2 - 2a^2\alpha cd + 2a^2\beta cd \\
&\qquad +2\alpha b^2cd - 2b^2\beta cd + 2a^2\alpha^2 + 4a^2\alpha\beta - a^2d^2 - b^2c^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0, \\
&a^2\alpha\beta c - 2a^2\alpha^2c + a^2\beta^2c - 2a^2\alpha d - a^2\beta d + \alpha b^2d - b^2\beta d - b^2c = 0, \\
&a^2\alpha^2b^2c^2 - 2a^2\alpha b^2\beta c^2 + a^2b^2\beta^2c^2 + 2a^2\alpha b^2cd - 2a^2b^2\beta cd + 2a^2\alpha b^2\beta \\
&\qquad + 4a^2b^2\beta^2 + a^2b^2d^2 + a^4 - b^4 + 2b^2\Lambda + 2b^2z_2 = 0, \\
&a(2\alpha^2b^2d - \alpha b^2\beta d - b^2\beta^2d + a^2\alpha c - a^2\beta c - 2\alpha b^2c - b^2\beta c + a^2d) = 0, \\
&a(2\alpha b^2\beta cd - \alpha^2b^2cd - b^2\beta^2cd + \alpha b^2c^2 - \alpha b^2d^2 - b^2\beta c^2 + b^2\beta d^2 \\
&\qquad + b^2cd + a^2\alpha + 2a^2\beta - \alpha b^2 - 2b^2\beta) = 0,
\end{aligned}$$

$$\alpha^2 b^4 d^2 - 2\alpha b^4 \beta d^2 + b^4 \beta^2 d^2 - 2\alpha b^4 cd + 2b^4 \beta cd + 2a^2 \alpha b^2 \beta$$
$$+ 4a^2 b^2 \beta^2 + b^4 c^2 - a^4 + b^4 + 2b^2 \Lambda + 2b^2 z_2 = 0,$$
$$a^2 \alpha^2 b^2 c^2 - 2a^2 \alpha b^2 \beta c^2 + a^2 b^2 \beta^2 c^2 + \alpha^2 b^4 d^2 - 2\alpha b^4 \beta d^2 + b^4 \beta^2 d^2 + 2a^2 \alpha b^2 cd$$
$$-2a^2 b^2 \beta cd - 2\alpha b^4 cd + 2b^4 \beta cd + 2a^2 \alpha^2 b^2 + 4a^2 b^2 \beta^2 + a^2 b^2 d^2$$
$$+ b^4 c^2 + a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 + 2b^2 \Lambda = 0.$$

Так как $a > 0$, то сумма четвертого, домноженного на $\frac{1}{a}$, и, домноженного на $\beta + 2\alpha$, второго уравнений дает:

$$a^2 \left(4 \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta \right)^2 + 1 \right) ((\alpha - \beta)c + d) = 0,$$

а значит $d = c(\beta - \alpha)$. Но тогда второе уравнение примет вид

$$b^2 c((\beta - \alpha)^2 + 1) = 0,$$

что, с учетом $b > 0$, дает $c = 0$. Далее разность третьего и шестого уравнений дадут $a = b$. Система примет вид:

$$a^2 \alpha(\alpha + 2\beta) + \Lambda + z_1 = 0, a^2 \beta(\alpha + 2\beta) + \Lambda + z_2 = 0, a^2(\alpha^2 + 2\beta^2) + \Lambda = 0.$$

Данная система очевидно имеет единственное нетривиальное решение:

$$z_1 = -2a^2 \beta(\alpha - \beta), \quad z_2 = a^2 \alpha(\alpha - \beta), \quad \Lambda = -a^2(\alpha^2 + 2\beta^2).$$

■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,7}$.

Лемма 2.18. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,7}$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 2z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z_1 c = 0, z_1 d = 0 \right\}.$$

Предложение 2.19. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $\mathbb{A}_{4,7}$, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. Так как $D \neq 0$ (иначе алгебраический солитон Риччи тривиален), то, в силу дополнительных условий на матрицу D, приведенных в лемме 2.18, необходимо выполняется $c = d = 0$. Система (1.7) примет вид:

$$
\begin{gathered}
16a^2 - b^2 + 2\Lambda + 4z_1 = 0, \\
8a^2 + b^2 - e^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0, \\
ae = 0, \\
8a^2 + b^2 + e^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0, \\
12a^2 + e^2 + 2\Lambda = 0.
\end{gathered}
$$

Третье уравнение системы противоречит условиям $a > 0$, $e > 0$. Система (1.7) в случае метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,7}$ решений не имеет. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,8}$.

Лемма 2.19. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,8}$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*

$$
D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid bz_2 = 0, dz_1 = 0, e(z_1 - z_2) = 0 \right\}.
$$

Предложение 2.20. *Левоинвариантная метрика на группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $\mathbb{A}_{4,8}$, является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи тогда и только тогда, когда в обобщенном базисе Дж. Милнора структурные константы алгебры Ли удовлетворяют условиям $c = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $b = d = e = 0$.*

Доказательство. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,8}$ система (1.7) примет вид:

$$
\begin{gathered}
a^2 + b^2 + d^2 - 2\Lambda - 2z_1 - 2z_2 = 0, \\
bc + de = 0, \\
a^2 + b^2 - e^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,
\end{gathered}
$$

$$cd = 0,$$

$$bd + 2ce = 0,$$

$$a^2 + d^2 + e^2 + 2\Lambda + 2z_2 = 0,$$

$$ad = 0,$$

$$ab = 0,$$

$$b^2 + 4c^2 + d^2 + e^2 + 2\Lambda = 0.$$

Т.к. $a > 0$, $c > 0$, то из четвертого и восьмого уравнений получаем $b = d = 0$, тогда пятое уравнение дает $e = 0$. Система примет вид:

$$a^2 - 2\Lambda - 2z_1 - 2z_2 = 0, a^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0, a^2 + 2\Lambda + 2z_2 = 0, 2c^2 + \Lambda = 0.$$

Данная система очевидно имеет единственное нетривиальное решение:

$$z_1 = z_2 = a^2, \quad \Lambda = -\frac{3}{2}a^2, \quad c = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$, $-1 < \beta \leqslant 1$.

Лемма 2.20. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*
При $\beta \neq 1$:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid cz_2 = 0, dz_1 = 0, f(z_1 - z_2) = 0 \right\}.$$

При $\beta = 1$:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 + z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & z_2 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid cz_3 - dz_2 = 0, cz_2 - dz_1 = 0 \right\}.$$

Предложение 2.21. *Левоинвариантная метрика на группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли* $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$*, является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи тогда и только тогда, когда в обобщенном базисе Дж. Милнора структурные константы алгебры Ли удовлетворяют условиям* $c = d = f = 0$, $b = \frac{2}{3}a\sqrt{3\beta^2 + 3\beta + 3}$.

Доказательство. Пусть $\beta \neq 1$. Так как $D \neq 0$ (иначе алгебраический солитон Риччи тривиален), то, в силу дополнительных условий на матрицу D, приведенных в лемме 2.20, возможны три случая: либо $z_1 = 0$, $c = f = 0$; либо $z_2 = 0$, $d = f = 0$; либо $c = d = 0$.
Пусть $z_1 = 0$, $c = f = 0$. Система (1.7) примет вид:

$$4a^2\beta^2 + 8a^2\beta + 4a^2 - b^2 - d^2 + 2\Lambda + 2z_2 = 0,$$

$$4a^2\beta + 4a^2 + b^2 + 2\Lambda = 0,$$

$$ad(3 + 2\beta) = 0,$$

$$4a^2\beta^2 + 4a^2\beta + b^2 + d^2 + 2\Lambda + 2z_2 = 0,$$

$$bd = 0,$$

$$4a^2\beta^2 + 4a^2\beta + 4a^2 + d^2 + 2\Lambda = 0.$$

Так как $b > 0$, то из пятого уравнения следует $d = 0$. Тогда разность первого и четвертого уравнений имеет вид:

$$2a^2(\beta + 1) - b^2 = 0,$$

что, с учетом $a > 0$, $b > 0$, $-1 < \beta \leqslant 1$ дает $b = a\sqrt{2\beta + 2}$. Разность второго и последнего уравнений принимает вид

$$a^2(2\beta + 1)(\beta - 1) = 0,$$

значит $\beta = -\frac{1}{2}$. Система примет вид:

$$\Lambda + z_2 = 0, \quad 3a^2 + 2\Lambda = 0.$$

Данная система очевидно имеет единственное нетривиальное решение:

$$z_2 = \frac{3}{2}a^2, \quad \Lambda = -\frac{3}{2}a^2.$$

Пусть $z_2 = 0$, $d = f = 0$. Система (1.7) примет вид:

$$4a^2\beta^2 + 8a^2\beta + 4a^2 - b^2 - c^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$
$$3a\beta c + 2ac = 0,$$
$$4a^2\beta + 4a^2 + b^2 + c^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$
$$4a^2\beta^2 + 4a^2\beta + b^2 + 2\Lambda = 0,$$
$$bc = 0,$$
$$4a^2\beta^2 + 4a^2\beta + 4a^2 + c^2 + 2\Lambda = 0.$$

Так как $b > 0$, то из пятого уравнения следует $c = 0$. Тогда разность четвертого и последнего уравнений имеет вид:

$$b^2 = 4a^2,$$

что, с учетом $a > 0$, $b > 0$ дает $b = 2a$. Разность первого и третьего уравнений принимает вид

$$a^2(\beta + 2)(\beta - 1) = 0,$$

что невозможно, так как в данном случае $a > 0$, $-1 < \beta < 1$.

Пусть $c = d = 0$. Система (1.7) примет вид:

$$4a^2\beta^2 + 8a^2\beta + 4a^2 - b^2 + 2\Lambda + 2z_1 + 2z_2 = 0,$$
$$4a^2\beta - \beta^2 f^2 + 2\beta f^2 + 4a^2 + b^2 - f^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$
$$af(\beta + 3)(\beta - 1) = 0,$$
$$4a^2\beta^2 + \beta^2 f^2 + 4a^2\beta - 2\beta f^2 + b^2 + f^2 + 2\Lambda + 2z_2 = 0,$$
$$4a^2\beta^2 + \beta^2 f^2 + 4a^2\beta - 2\beta f^2 + 4a^2 + f^2 + 2\Lambda = 0.$$

Из третьего уравнения, с учетом $a > 0$, $-1 < \beta < 1$, следует $f = 0$. Далее из суммы первого и последнего уравнений вычитаем второе и четвертое:

$$(4\beta^2 + 4\beta + 4)a^2 - 3b^2 = 0,$$

что с учетом $a > 0$, $b > 0$ дает $b = \frac{2}{3}a\sqrt{3\beta^2 + 3\beta + 3}$. Система примет вид:

$$2a^2(\beta^2 + \beta + 1) + \Lambda = 0, \frac{2}{3}a^2(\beta + 2)^2 + \Lambda + z_1 = 0, \frac{2}{3}a^2(2\beta + 1)^2 + \Lambda + z_2 = 0.$$

Данная система очевидно имеет единственное нетривиальное решение:

$$z_1 = \frac{2}{3}a^2(2\beta^2 - \beta - 1), z_2 = -\frac{2}{3}a^2(\beta^2 + \beta - 2), \quad \Lambda = -2a^2(\beta^2 + \beta + 1).$$

Пусть $\beta = 1$. В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}^1_{4,9}$ система (1.7) примет вид:

$$16a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2\Lambda + 2z_1 + 2z_3 = 0,$$

$$ac = 0,$$

$$8a^2 + b^2 + c^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$

$$ad = 0,$$

$$cd + 2z_2 = 0,$$

$$8a^2 + b^2 + d^2 + 2\Lambda + 2z_3 = 0,$$

$$bd = 0,$$

$$bc = 0,$$

$$12a^2 + c^2 + d^2 + 2\Lambda = 0.$$

Так как $a > 0$, то из второго и четвертого уравнений получам $c = d = 0$. Далее из суммы первого и последнего уравнений вычитаем третье и шестое:

$$4a^2 - b^2 = 0,$$

что с учетом $a > 0$, $b > 0$ дает $b = 2a$. Система примет вид:

$$6a^2 + \Lambda + z_1 = 0, z_2 = 0, 6a^2 + \Lambda + z_3 = 0, 6a^2 + \Lambda = 0.$$

Данная система очевидно имеет единственное решение:

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0, \quad \Lambda = -6a^2,$$

соответствующее многообразию Эйнштейна, а значит тривиальному алгебраическому солитону Риччи. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,10}$.

Лемма 2.21. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли*

$\mathbb{A}_{4,10}$ *матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 2z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid bz_1 = 0, dz_1 = 0 \right\}.$$

Предложение 2.22. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $\mathbb{A}_{4,10}$, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. Так как $D \neq 0$ (иначе алгебраический солитон Риччи тривиален), то, в силу дополнительных условий на матрицу D, приведенных в лемме 2.21, необходимо выполняется $b = d = 0$. Система (1.7) примет вид:

$$\begin{gathered} a^2 - 2\Lambda - 4z_1 = 0, \\ a^2 + c^2 - f^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0, \\ a^2 - c^2 + f^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0, \\ c^2 - 2cf + f^2 + 2\Lambda = 0. \end{gathered}$$

Разность второго и третьего уравнений дает $f = c$. Далее из последнего уравнения получаем $\Lambda = 0$. Но тогда сумма первого и удвоенного второго уравнений дает $a^2 = 0$, что противоречит ограничениям на структурные константы. Система (1.7) в случае метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,10}$ решений не имеет. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}^{\alpha}_{4,11}$, $\alpha > 0$.

Лемма 2.22. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,11}$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 2z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid cz_1 = 0, dz_1 = 0 \right\}.$$

Предложение 2.23. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $\mathbb{A}_{4,11}$, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая* *является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. Так как $D \neq 0$ (иначе алгебраический солитон Риччи тривиален), то, в силу дополнительных условий на матрицу D, приведенных в лемме 2.22, необходимо выполняется $c = d = 0$. Система (1.7) примет вид:

$$\begin{gathered} 16a^2\alpha^2 - b^2 + 2\Lambda + 4z_1 = 0, \\ 8a^2\alpha^2 f^2 - a^2 f^4 + b^2 f^2 + 2f^2\Lambda + 2f^2 z_1 + a^2 = 0, \\ 2a^2(f^2-1)\alpha = 0, \\ 8a^2\alpha^2 f^2 + a^2 f^4 + b^2 f^2 + 2f^2\Lambda + 2f^2 z_1 - a^2 = 0, \\ 12a^2\alpha^2 f^2 + a^2 f^4 - 2a^2 f^2 + 2f^2\Lambda + a^2 = 0. \end{gathered}$$

Так как $a > 0$, $f > 0$, $\alpha > 0$ то из третьего уравнения следует $f = 1$. Далее из суммы первого и удвоенного последнего уравнений вычитаем удвоенное второе уравнение:

$$(2a\alpha - b)(2a\alpha + b) = 0.$$

С учетом условий $a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$ получим $b = 2a\alpha$, что соответствует многообразию Эйнштейна с константой $-6a^2\alpha^2$, а значит тривиальному алгебраическому солитону Риччи. ■

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,12}$.

Лемма 2.23. *В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,12}$ матрицы симметричных дифференцирований D имеют вид:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid f z_1 = 0, g z_1 = 0 \right\}.$$

Предложение 2.24. *На группе Ли, соответствующей метрической алгебре Ли $\mathbb{A}_{4,12}$, нельзя ввести левоинвариантную риманову метрику, которая является нетривиальным алгебраическим солитоном Риччи.*

Доказательство. Так как $D \neq 0$ (иначе алгебраический солитон Риччи тривиален), то, в силу дополнительных условий на матрицу D, приведенных в лемме 2.23, необходимо выполняется $f = g = 0$. Система (1.7) примет вид:

$$4a^2 + 4b^2 + c^2 - d^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$
$$bc - bd = 0,$$
$$4a^2 + 4b^2 - c^2 + d^2 + 2\Lambda + 2z_1 = 0,$$
$$2a^2 + \Lambda = 0,$$
$$ab = 0,$$
$$4b^2 + c^2 - 2cd + d^2 + 2\Lambda = 0.$$

С учетом условий $a > 0$, $c > 0$, $d > 0$ из пятого уравнения получаем $b = 0$. Далее разность первого и третьего уравнений дают $c = d$. Но тогда из разности четвертого и последнего уравнений получаем $a^2 = 0$, что противоречит ограничениям на структурные константы. Система (1.7) в случае метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,12}$ решений не имеет. ■

2.2 Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных метрических группах Ли

Пусть далее X — левоинвариантное векторное поле, тогда (1.6) можно переписать в терминах структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. [5]):

$$r_{ij} = \Lambda g_{ij} + X^k (c^s_{ki} g_{sj} + c^s_{kj} g_{si}), \tag{2.1}$$

где X^k — координаты левоинвариантного векторного поля X, c^k_{ij} — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, g_{ij} — компоненты метрического тензора, r_{ij} — компоненты тензора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа.

В работе [5] показано, что в случае унимодулярных групп произвольной размерности, а в случае неунимодулярных групп — в размерности $n = 3$ система (2.1) не имеет решений, соответствующих нетривиальным солитонам Риччи. Также в ней поставлен вопрос о существовании решений уравнения однородного инвариантного солитона Риччи в размерностях выше 3 в случае неунимодулярных групп Ли. С использованием техники обобщенных базисов Дж. Милнора, можно ответить на этот вопрос в размерности $n = 4$.

Теорема 2.3. *Пусть G — четырехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой однородного инвариантного солитона Риччи g. Тогда (G, g) — тривиальный однородный инвариантный солитон Риччи.*

Рассмотрим далее все неунимодулярные четырехмерные алгебры Ли и покажем отсутствие нетривиальных решений системы уравнений (2.1), тем самым докажем теорему 2.3.

Метрическая алгебра Ли $2\mathbb{A}_2$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $2\mathbb{A}_2$ система (2.1) примет вид:

$$
\begin{aligned}
(b^2+2)a^2 - f^2h^2 + c^2 + 2\Lambda &= 0,\\
a(b^2d + b^2h - f^2h + 2d) - 2X^4fh &= 0,\\
((d+2X^3)h + 2a^2)f + bc(d+h) &= 0,\\
((2d+h)f - cb)a + 2X^4h &= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(b^2 - 2f^2 - 2)a^2 + (-4fX^4 + 4X^1)a\\
&\qquad + (b^2-2)d^2 + (2b^2h + 2h - 4X^3)d\\
&\qquad\qquad + b^2h^2 + c^2f^2 + c^2 - 2\Lambda = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(b^2+f^2+2)h^2 + (2b^2d - 2d - 4X^3)h + (a^2+d^2)b^2 + (2a^2+c^2)f^2 + 2\Lambda &= 0,\\
((2d+2h)X^3 + 2a^2 - 2X^1a + 2d(d+h))b + 2f(aX^2 - ch + cX^3) &= 0,\\
(2a^2f + 2X^4a + fh(d+h))b - 2X^2a - (2d - h + 2X^3)c &= 0,\\
(b^2+f^2+2)h^2 + 2b^2dh + b^2d^2 + 2d^2 + (f^2+1)c^2 + 2\Lambda &= 0,\\
2(d+h)(af + X^4)b - 2cfX^4 + 2ac - 2X^1c - 2X^2d &= 0.
\end{aligned}
$$

Последовательно исключая Λ и X^i получаем, что $b = c = d = f = 0$ и $a = h$, что соответствует тривиальному солитону Риччи. Система (2.1) в случае алгебры Ли $2\mathbb{A}_2$ нетривиальных решений не имеет.

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$ система (2.1) примет вид:

$$\begin{aligned}
2\Lambda + 2a^2 + b^2 = 0, &\quad X^2 a = 0,\\
4X^1 a - 2\Lambda - 2a^2 - b^2 = 0, &\quad \Lambda = 0,\\
X^2 b = 0, &\quad X^1 b = 0,\\
2\Lambda - b^2 = 0. &
\end{aligned}$$

Из четвертого уравнения следует $\Lambda = 0$, а значит из последнего получаем $b = 0$. Но тогда первое уравнение дает $a = 0$, что противоречит условию $a > 0$. Система (2.1) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_2 \oplus 2\mathbb{A}_1$ решений не имеет.

Метрическая лгебра Ли $\mathbb{A}_{32} \oplus \mathbb{A}_1$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{32} \oplus \mathbb{A}_1$ система (2.1) примет вид:

$$\begin{aligned}
2b(a + X^3) - dc = 0, &\quad aX^2 - dX^4 = 0,\\
c(3a + 2X^3) = 0, &\quad c^2 + d^2 + 2\Lambda = 0,\\
aX^1 + bX^2 - cX^4 = 0, &\quad (3a + 2X^3)d + bc = 0,
\end{aligned}$$

$$4a^2 + 4aX^3 - b^2 - c^2 + 2\Lambda = 0,$$

$$4a^2 + 4aX^3 + b^2 - d^2 + 2\Lambda = 0,$$

$$4a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\Lambda = 0.$$

Разность последнего и четвертого уравнений дают $4a^2 + b^2 = 0$, что противоречит условию $a > 0$, $b > 0$. Система (2.1) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{32} \oplus \mathbb{A}_1$ решений не имеет.

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{33} \oplus \mathbb{A}_1$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{33} \oplus \mathbb{A}_1$ система (2.1) примет вид:

$$4a^2 + 4aX^3 - b^2 + 2\Lambda = 0,$$

$$\begin{aligned}
2a^2 + 2aX^3 + \Lambda = 0, &\quad aX^1 - bX^4 = 0,\\
X^2 a = 0, &\quad 4a^2 + b^2 + 2\Lambda = 0,\\
b(3a + 2X^3) = 0, &\quad b^2 + 2\Lambda = 0.
\end{aligned}$$

Разность пятого и последнего уравнений дают $a^2 = 0$, что противоречит условию $a > 0$. Система (2.1) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{33} \oplus \mathbb{A}_1$ решений не имеет.

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{35}^{\alpha} \oplus \mathbb{A}_1$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{35}^{\alpha} \oplus \mathbb{A}_1$ система (2.1) примет вид:

$$\begin{gathered}
(2\alpha + 2)a^2 + 4X^3 a - c^2 - d^2 + 2\Lambda = 0, \\
2\alpha^2 a^2 + 2a(a + 2X^3)\alpha - b^2 + c^2 + 2\Lambda = 0, \\
2a^2(\alpha^2 + 2) + b^2 + c^2 + d^2 + 2\Lambda = 0, \\
d(a\alpha + 2a + 2X^3) = 0, \\
((2\alpha + 1)a + 2X^3)b + cd = 0, \\
2c(a + X^3) - bd = 0, \quad aX^1 + cX^2 - dX^4 = 0, \\
a\alpha X^2 - bX^4 = 0, \qquad b^2 + d^2 + 2\Lambda = 0.
\end{gathered}$$

Вычитая последнее уравнение из третьего, получаем

$$2a^2(\alpha^2 + 2) + c^2 = 0,$$

что противоречит условию $a > 0$. Система (2.1) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{35}^{\alpha} \oplus \mathbb{A}_1$ решений не имеет.

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{37}^{\alpha} \oplus \mathbb{A}_1$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{37}^{\alpha} \oplus \mathbb{A}_1$ система (2.1) примет вид:

$$\begin{gathered}
(aX^1 - dX^4)\alpha + b(aX^2 - cX^4) = 0, \\
(\alpha bc - d)X^4 - a(\alpha b X^2 - X^1) = 0, \\
3a\alpha^2 bc + (d(b^2 - 3)a + 2bcX^3)\alpha + ab^3 c - 2dX^3 = 0,
\end{gathered}$$

$$\begin{multline}
(a^2 + c^2)b^4 + 2\alpha b^3 cd + ((4a^2 + c^2 + d^2)\alpha^2 - 2a^2 \\
+ 2\Lambda)b^2 - 2\alpha bcd + a^2 + d^2 = 0,
\end{multline}$$

$$(a^2+c^2)b^4+2\alpha b^3cd+((d^2-4a^2)\alpha^2-4X^3a\alpha-2\Lambda)b^2-a^2=0,$$
$$\alpha^2bcd+((c^2-2a^2)b^2+2a^2-d^2)\alpha-2ab^2X^3-bcd+2aX^3=0,$$
$$a^2b^4+((4a^2-c^2)\alpha^2+4X^3a\alpha+2\Lambda)b^2+2\alpha bcd-a^2-d^2=0,$$
$$b^4c^2+2\alpha b^3cd+((c^2+d^2)\alpha^2+2\Lambda)b^2-2\alpha bcd+d^2=0,$$
$$(3a\alpha+2X^3)cb^3+(3a\alpha+2X^3)\alpha db^2-a\alpha bc+ad=0.$$

Вычитая из четвертого предпоследнее уравнение, получим

$$a^2b^2(4\alpha^2b^2+(b^2-1)^2)=0,$$

что противоречит ограничениям на структурные константы и параметры алгебры Ли. Система (2.1) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{37}^{\alpha}\oplus\mathbb{A}_1$ решений не имеет.

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,2}^{\beta}$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,2}^{\beta}$ система (2.1) примет вид:

$$ac(\beta e-d-e)(2a\beta+a+2X^4)=0,$$
$$(((\beta-1)d^2-e(\beta-1)^2d-\beta-2)a-2X^4)ac=0,$$
$$(c(d+e-\beta e)X^3+(X^1-dX^2)\beta+dX^2)a=0,$$
$$a(cX^3+X^2)=0,\quad X^3a=0,$$

$$((c^2e^2+d^2-2)\beta^2-(2e(d+e)c^2+2d^2+4)\beta$$
$$+c^2(d+e)^2+d^2)a^2-4X^4a\beta-2\Lambda=0,$$

$$(((2\beta^2+c^2-\beta-1)d-c^2e(\beta-1))a+2dX^4(\beta-1))a=0,$$
$$(c^2-\beta^2d^2+(2d^2-2)\beta-d^2-4)a^2-4X^4a-2\Lambda=0,$$
$$((2d(\beta-1)e-(\beta-1)^2e^2-d^2-1)c^2-2\beta-4)a^2-4X^4a-2\Lambda=0,$$

$$((2e(d+e)\beta-\beta^2e^2-d^2-2de-e^2-1)c^2$$
$$-(d^2+2)\beta^2+2\beta d^2-d^2-4)a^2-2\Lambda=0.$$

Рассмотрим первое уравнение. Оно, с учетом $a>0$, $c>0$, дает нам два возможных варианта:

Если $d = e(\beta - 1)$, то из второго уравнения следует, что $X^4 = -\frac{1}{2}a(\beta + 2)$. Но тогда из остальных уравнений системы следует $a^2c^2 = 0$, что невозможно в силу ограничений на структурные константы.
Если $X^4 = -\frac{1}{2}a(2\beta + 1)$, то из седьмого уравнения следует, что $d = e(\beta - 1)$. Далее из второго уравнения получаем $\beta = 1$, но тогда остальные уравнения системы снова дают $a^2c^2 = 0$. Система (2.1) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}^{\beta}_{4,2}$ решений не имеет.

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,3}$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,3}$ система (2.1) примет вид:

$$\begin{gathered}
2X^4b - dc + 2ab = 0, \qquad 2\Lambda + b^2 - d^2 = 0, \\
c(a + X^4) = 0, \quad 2X^4d + bc + ad = 0, \\
2\Lambda + c^2 + d^2 = 0, \qquad dX^3 = 0, \\
4X^4a + 2\Lambda - b^2 - c^2 + 2a^2 = 0, \\
aX^1 + bX^2 + cX^3 = 0, \\
2\Lambda + 2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0.
\end{gathered}$$

Из пятого уравнения получаем, что $\Lambda = -\frac{1}{2}(c^2 + d^2)$. Но тогда последнее уравнение дает $2a^2 + b^2 = 0$, что невозможно, так как $a > 0$. Система (2.1) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,3}$ решений не имеет.

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,4}$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,4}$ система (2.1) примет вид:

$$\begin{gathered}
c^2 - 4X^4a - 2\Lambda + b^2 - 6a^2 = 0, \\
d^2 - 4X^4a - 2\Lambda - b^2 - 6a^2 = 0, \\
4X^4a + 2\Lambda + c^2 + 6a^2 + d^2 = 0, \\
2\Lambda + 6a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0,
\end{gathered}$$

$$dc - 2X^4 b - 3ab = 0, \qquad c(2X^4 + 3a) = 0,$$
$$2X^4 d + bc + 3ad = 0, \quad aX^1 + bX^2 + cX^3 = 0,$$
$$aX^2 + dX^3 = 0, \qquad X^3 a = 0.$$

Заметим, что если сложить первое и третье уравнения, то получим $b^2 + 2c^2 + d^2 = 0$, что невозможно так как $b > 0$ и $d > 0$. Система (2.1) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,4}$ решений не имеет.

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ система (2.1) примет вид:

$$(\alpha bd - bd + \beta c - c)(a\alpha + 2a + 2X^4) = 0,$$
$$(bd(\alpha - 1) + c(\beta - 1))X^3 + X^2(\alpha - 1)b + X^1 = 0,$$
$$\alpha dX^3 - \beta dX^3 + \alpha X^2 = 0, \quad X^3 \beta a = 0,$$

$$((\alpha - 1)^2(d^2 + 1)b^2 + (2(\beta - 1))(\alpha - 1)dcb \\ + (\beta - 1)^2 c^2 - 2\alpha - 2\beta - 2)a^2 - 4X^4 a - 2\Lambda = 0,$$

$$((1 - \alpha)((\beta - \alpha)d^2 + \beta + 2)b - cd(\beta - 1)(\beta - \alpha))a - 2bX^4(\alpha - 1) = 0,$$

$$((-b^2 + d^2 - 2)\alpha^2 + (-2\beta d^2 + 2b^2 - 2\beta - 2)\alpha \\ + \beta^2 d^2 - b^2)a^2 - 4X^4 a\alpha - 2\Lambda = 0,$$

$$(((b^2 + 2)\alpha^2 + (-2b^2 - 2\beta + 1)\alpha + b^2 - \beta)d \\ + bc(\alpha - 1)(\beta - 1))a - 2dX^4(\beta - \alpha) = 0,$$

$$((\alpha - 1)^2 b^2 d^2 + (2\beta - 2)(\alpha - 1)dcb \\ + (\beta - 1)^2 c^2 + (\alpha - \beta)^2 d^2 \\ + 2\beta(\alpha + \beta + 1))a^2 + 4X^4 \beta a + 2\Lambda = 0,$$

$$((\alpha - 1)^2(d^2 + 1)b^2 + (2\beta - 2)(\alpha - 1)dcb + (\beta - 1)^2 c^2 \\ + (\alpha - \beta)^2 d^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2)a^2 + 2\Lambda = 0.$$

Первое уравнение дает нам три случая:
Пусть $X^4=-\frac{1}{2}a(\alpha+2)$. Но тогда из остальных уравнений системы следует

$$(\alpha-1)^2b^2+2\alpha^2+2(\beta+2)=0,$$

что невозможно в силу ограничений на параметры алгебры Ли.
Пусть $c=-\frac{bd(\alpha-1)}{\beta-1}$. Тогда либо получаем тривиальный солитон Риччи при $b=d=0$, $\alpha=\beta=1$; либо $a^2(d^2+1)(2\alpha^2+1)^2=0$, что невозможно так как $a>0$.
Пусть $\beta=1$. Тогда $b=d=0$, $\alpha=1$ и снова получаем тривиальный солитон Риччи. Система (2.1) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$ нетривиальных решений не имеет.

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$ система (2.1) примет вид:

$$\begin{aligned}
(2\alpha^2+4\alpha\beta)a^2+4X^4a\alpha-c^2-d^2+2\Lambda=0,\\
((\beta+2\alpha)a+2X^4)c-bd=0,\\
b^4+((2\alpha^2+4\beta^2-2)a^2+c^2+d^2+2\Lambda)b^2+a^4=0,\\
((2\alpha\beta+4\beta^2)a^2+4X^4\beta a+c^2+2\Lambda)b^2+a^4=b^4,\\
((2\alpha\beta+4\beta^2)a^2+4X^4\beta a+d^2+2\Lambda)b^2+b^4=a^4,\\
a^2c+bd(\beta+2\alpha)a+2X^4db=0,\quad aX^2-b\beta X^3=0,\\
a\alpha X^1+cX^2+dX^3=0,\quad a\beta X^2+bX^3=0,\\
(2\beta+\alpha)a^3+2a^2X^4-b^2(2\beta+\alpha)a-2b^2X^4-bcd=0.
\end{aligned}$$

Пусть $d\neq 0$, тогда $X^4=-\frac{a(bd(\beta+2\alpha)+ac)}{2bd}$. Но тогда из второго уравнения получаем $a^2c^2+b^2d^2=0$, что невозможно в силу ограничений на структурные константы.
Пусть $d=0$. Тогда из второго уравнения системы получаем, что либо $c=0$, $a=b$, $\alpha=\beta$, что соответствует тривиальному солитону Риччи; либо $c=0$ и $X^4=-\frac{1}{2}(2\beta+\alpha)a$, откуда получаем $(\alpha^2+2\beta^2)(a^2+b^2)=0$, что невозможно. Система (2.1) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$ нетривиальных решений не имеет.

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,7}$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,7}$ система (2.1) примет вид:

$$\begin{aligned}
d^2 - 8X^4a - 2\Lambda + b^2 + c^2 - 16a^2 = 0,\\
2X^3b + 2X^4c - ed + 5ac = 0,\\
e^2 - 4X^4a - 2\Lambda - b^2 - c^2 - 8a^2 = 0,\\
2X^2b - 2X^4d - 5ad = 0,\\
4X^4a + 2\Lambda + b^2 + d^2 + 8a^2 + e^2 = 0,\\
2\Lambda + 12a^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2X^4e + cd + 4ae = 0, \quad 2aX^1 + cX^2 + dX^3 = 0,\\
2X^2a + 2X^3e + bd = 0, \qquad\qquad 2X^3a - bc = 0.
\end{aligned}$$

Последовательно исключая из системы Λ и X^i необходимо получаем, что $c = d = 0$. Но тогда разность третьего и пятого уравнений дают $e^2 = 0$, что невозможно в силу ограничений на структурные константы. Система (2.1) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,7}$ решений не имеет.

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$ система (2.1) примет вид:

$$\begin{aligned}
(3a\beta + 2a + 2X^4)c - fd\beta + 2X^3b + fd = 0,\\
((3 + 2\beta)a + 2X^4)d - 2X^2b = 0,\\
(\beta - 1)(a\beta + 3a + 2X^4)f + cd = 0,\\
a\beta X^1 + aX^1 + cX^2 + dX^3 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
4a^2(\beta + 1)^2 + 4X^4a(\beta + 1) - b^2 - d^2 + 2\Lambda = c^2,\\
2X^3f(\beta - 1) + 2X^2a + bd = 0, \quad 2a\beta X^3 = bc,\\
(4a^2 + 2f^2)\beta + 4a^2 + 4X^4a + b^2 + c^2 - f^2 - \beta^2f^2 + 2\Lambda = 0,
\end{gathered}$$

$$(4a^2 + f^2)\beta^2 + (4a^2 + 4aX^4 - 2f^2)\beta + b^2 + d^2 + f^2 + 2\Lambda = 0,$$

$$(4a^2 + f^2)\beta^2 + (4a^2 - 2f^2)\beta + 4a^2 + c^2 + d^2 + f^2 + 2\Lambda = 0.$$

Последовательно исключая Λ и X^i получаем, что $c = d = f = 0$. Но тогда либо $\beta = 1$ и $b = 2a$, что дает тривиальный солитон Риччи; либо $a^2(\beta^2 + \beta + 1) = 0$, что невозможно в силу ограничений на структурные константы. Система (2.1) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$ нетривиальных решений не имеет.

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$ система (2.1) примет вид:

$$\begin{aligned}
16a^2\alpha^2 + 8a\alpha X^4 - b^2 - c^2 - d^2 + 2\Lambda = 0,\\
5a\alpha c - adf + 2bX^3 + 2cX^4 = 0,\\
(5a\alpha d - 2bX^2 + 2dX^4)f + ac = 0,\\
(4\alpha f^2 - 4\alpha)a^2 + (2f^2X^4 - 2X^4)a + cdf = 0,\\
2a\alpha X^1 + cX^2 + dX^3 = 0,\\
2a\alpha X^2 + 2afX^3 + bd = 0,\\
2a\alpha fX^3 - bcf - 2aX^2 = 0,\\
a^2f^4 + ((12\alpha^2 - 2)a^2 + c^2 + d^2 + 2\Lambda)f^2 + a^2 = 0,\\
a^2f^4 - (8a^2\alpha^2 + 4a\alpha X^4 + b^2 + c^2 + 2\Lambda)f^2 = a^2,\\
a^2f^4 + (8a^2\alpha^2 + 4a\alpha X^4 + b^2 + d^2 + 2\Lambda)f^2 = a^2.
\end{aligned}$$

Пусть $c \neq 0$, тогда, поочередно выражая Λ и X^i получаем

$$a^2\alpha^2d^2f^2 + a^2\alpha^2c^2 + a^2d^2f^2 + b^2c^2f^2 + a^2c^2 + b^2d^2 = 0,$$

что невозможно в силу ограничений на структурные константы.

Пусть $c = 0$. Тогда получаем, что либо $f = 1$, $d = 0$ и $b = 2a\alpha$, что соответствует тривиальному солитону Риччи; либо $X^4 = -2a\alpha$ и $d = 0$, $f = 1$, что влечет $b^2 = 0$, что невозможно. Система (2.1) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$ нетривиальных решений не имеет.

Метрическая алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,12}$.

В обобщенном базисе Дж. Милнора метрической алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,12}$ система (2.1) примет вид:

$$
\begin{aligned}
4a^2 + 4aX^3 + 4b^2 + 4bX^4 + c^2 - d^2 - f^2 + 2\Lambda = 0,\\
2bc - 2bd + 2cX^4 - 2dX^4 + fh = 0,\\
4a^2 + 4aX^3 + 4b^2 + 4bX^4 - c^2 + d^2 - h^2 + 2\Lambda = 0,\\
3af + 2bX^1 + 2dX^2 + 2fX^3 = 0,\\
3ah + 2bX^2 - 2cX^1 + 2hX^3 = 0,\\
4b^2 + c^2 - 2cd + d^2 + f^2 + h^2 + 2\Lambda = 0,\\
2aX^1 - 3bf + ch = 2fX^4, \;\; 4a^2 + f^2 + h^2 = -2\Lambda,\\
2aX^2 - 3bh - df = 2hX^4, \qquad\qquad\qquad ab = 0.
\end{aligned}
$$

Из последнего уравнения, с учетом $a > 0$, получаем, что $b = 0$. Далее из восьмого и шестого уравнений получаем, что $c = d \pm 2a$. Последовательно исключая из уравнений X^i необходимо получаем $f = h = 0$. Но тогда из первого и второго уравнений получаем $a(a + d) = 0$, что невозможно так как $a > 0$ и $d > 0$. Система (2.1) в случае алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,12}$ решений не имеет.

Замечание. *Отметим, что в случае групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой существуют примеры нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи (см. [17]).*

Глава 3

Конформно плоские группы Ли с метрикой солитона Риччи

3.1 Группы Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой

Пусть $x \in M$, T_xM — касательное пространство в точке x некоторого (псевдо)риманова многообразия (M, g). Известно разложение (см. [1]):

$$R = W + A \owedge g,$$

где W — тензор Вейля, A — тензор одномерной кривизны, $(A \owedge g)(X, Y, Z, V) = A(X, Z)g(Y, V) + A(Y, V)g(X, Z) - A(X, V)g(Y, Z) - A(Y, Z)g(X, V)$ — произведение Кулкарни-Номидзу.

Определение 16. (Псевдо)риманово многообразие (M, g) размерности $n \geqslant 4$ называется *конформно плоским*, если его тензор Вейля тривиален.

Пусть далее $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Известно, что, в отличие от случая римановой метрики, в случае псевдоримановой метрики оператор Риччи ρ не всегда может быть приведен к диагональному виду (см., например, [23]).

Определение 17. Пусть $\mathfrak{g}$ — n-мерная метрическая алгебра Ли со знаконеопределенным скалярным произведением. Базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ будем называть *псевдоортонормированным*, если $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ при $i \neq j$ и $\langle e_i, e_i \rangle = \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = \pm 1$.

В работе [24] (см. также [25, 26]) доказана следующая

Теорема 3.1 (K. Honda, 2003 [24])**.** *Пусть G — группа Ли ($n \geqslant 4$) с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой g, алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и диагонализируемым оператором Риччи ρ. Тогда главные значения оператора Риччи могут принимать не более двух различных значений. Если их ровно два, ρ_1 кратности k и ρ_2 кратности $n-k$, то они имеют вид:*

$$\rho_1 = 2(k-1)a, \quad \rho_2 = 2(k+1-n)a, \quad a \in \mathbb{R}/\{0\}.$$

Причем в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует псевдоортонормированный базис, в котором матрица оператора Риччи имеет диагональный вид с главными значениями на диагонали.

Далее будем предполагать, что G — группа Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой g, алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и диагонализируемым оператором Риччи ρ.

Замечание. *Если оператор Риччи имеет ровно одно собственное значение, то тензор Риччи пропорционален метрическому тензору, и данная метрика очевидно является метрикой Эйнштейна, а солитон Риччи — тривиальным. Поэтому далее мы будем предполагать, что оператор Риччи имеет ровно два различных собственных значения.*

Расмотрим псевдоортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, в котором диагонализируется оператор Риччи. Переобозначая, в случае необходимости, базисные вектора, получим, что матрица оператора Риччи в этом базисе имеет вид:

$$\rho = \operatorname{diag}\Big(\underbrace{\rho_1, \ldots, \rho_1}_{k}, \underbrace{\rho_2, \ldots, \rho_2}_{n-k}\Big), \quad \rho_1 \neq \rho_2. \tag{3.1}$$

Введем следующие обозначения:

$A = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_k)$ — векторное подпространство алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующее собственному значению оператора Риччи ρ_1,

$B = \operatorname{span}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ — векторное подпространство алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующее собственному значению оператора Риччи ρ_2.

Лемма 3.1. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой g размерности $n \geqslant 4$, алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и диагонализируемым оператором Риччи ρ, имеющим ровно два различных собственных значения. Тогда*

1. *A и B — подалгебры Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*
2. *$c^j_{hi} = -\varepsilon_i\varepsilon_j c^i_{hj}$ при $1 \leqslant i,j \leqslant k$, $k+1 \leqslant h \leqslant n$ или $1 \leqslant h \leqslant k$, $k+1 \leqslant i,j \leqslant n$.*

Доказательство. Отметим, что тензор Риччи конформно плоской группы Ли удовлетворяет условию [1]:

$$r_{ij,h} = r_{ih,j}.$$

Распишем ковариантную производную через символы Кристофеля, подразумевая суммирование по индексу m:

$$r_{mj}\Gamma^m_{hi} + r_{im}\Gamma^m_{hj} = r_{mh}\Gamma^m_{ji} + r_{im}\Gamma^m_{jh}.$$

В рассматриваемом псевдоортонормированном базисе матрица тензора Риччи имеет диагональный вид с элементами $\varepsilon_i\rho_i$ на диагонали. Значит

$$\varepsilon_j\rho_j\Gamma^j_{hi} + \varepsilon_i\rho_i\Gamma^i_{hj} = \varepsilon_h\rho_h\Gamma^h_{ji} + \varepsilon_i\rho_i\Gamma^i_{jh}.$$

Далее, с использованием свойства символов Кристофеля $\Gamma^h_{ij} = -\varepsilon_j\varepsilon_h\Gamma^j_{ih}$, получим

$$(\rho_i - \rho_j)\Gamma^i_{hj} = (\rho_i - \rho_h)\Gamma^i_{jh}.$$

Так как оператор Риччи имеет только два собственных значения, то возможны несколько случаев:

1. Если $\rho_j = \rho_h \neq \rho_i$, то $\Gamma^i_{hj} - \Gamma^i_{jh} = 0$, а значит, так как связность Леви-Чивита не имеет кручения, что $c^i_{hj} = \Gamma^i_{hj} - \Gamma^i_{jh} = 0$, откуда следует пункт 1 данной леммы.
2. Если $\rho_j = \rho_i \neq \rho_h$, то $\Gamma^i_{jh} = 0$, откуда, с учетом предыдущего пункта, следует пункт 2 данной леммы.

■

Также нам потребуется следующая техническая лемма.

Лемма 3.2. *Справедлива формула (3.2) для вычисления диагональных элементов оператора Риччи ρ в псевдоортонормированном базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$:*

$$\rho_i^i = \sum_{h,s} \left(\frac{1}{4}\varepsilon_i\varepsilon_h\varepsilon_s \left(\left(c_{is}^h\right)^2 + \left(c_{hs}^i\right)^2 - 3\left(c_{ih}^s\right)^2 \right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\varepsilon_h c_{ih}^s c_{hs}^i - \frac{1}{2}\varepsilon_i c_{ih}^s c_{is}^h + \frac{1}{2}\varepsilon_s c_{is}^h c_{hs}^i - \varepsilon_s c_{is}^i c_{hs}^h \right), \quad (3.2)$$

где c_{ij}^h — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\varepsilon_i = \pm 1$.

Доказательство. Применяя формулы (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) для вычисления элементов ρ_i^i и учитывая, что в псевдоортонормированном базисе $g = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, получим необходимую формулу. ■

3.2 Группы Ли с конформно плоской метрикой солитона Риччи

Данный раздел работы посвящен изучению групп Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой алгебраического солитона Риччи.

Теорема 3.2. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой g размерности $n \geqslant 4$ и диагонализируемым оператором Риччи ρ. Тогда, если (G, g) — алгебраический солитон Риччи, то (G, g) — тривиальный солитон Риччи.*

Доказательство. В силу уравнений (1.7) и (3.1), матрица оператора дифференцирования D имеет вид:

$$D = \mathrm{diag}\Big(\underbrace{\rho_1 - \Lambda, \dots, \rho_1 - \Lambda}_{k}, \underbrace{\rho_2 - \Lambda, \dots, \rho_2 - \Lambda}_{n-k}\Big).$$

Так как D — дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то для любых базисных векторов e_i и e_j выполняется:

$$D[e_i, e_j] = [De_i, e_j] + [e_i, De_j].$$

Пусть $1 \leqslant i,j \leqslant k$, тогда в силу вида матрицы дифференцирования D, приведенного выше, имеем:

$$D[e_i,e_j] = 2(\rho_1 - \Lambda)[e_i,e_j],$$

что дает три возможных варианта

$$[e_i,e_j] = 0; \tag{3.3a}$$

$$2(\rho_1 - \Lambda) = \rho_1 - \Lambda, \quad [e_i,e_j] \in A; \tag{3.3b}$$

$$2(\rho_1 - \Lambda) = \rho_2 - \Lambda, \quad [e_i,e_j] \in B. \tag{3.3c}$$

Аналогично, если $k+1 \leqslant i,j \leqslant n$, тогда

$$[e_i,e_j] = 0; \tag{3.4a}$$

$$2(\rho_2 - \Lambda) = \rho_1 - \Lambda, \quad [e_i,e_j] \in A; \tag{3.4b}$$

$$2(\rho_2 - \Lambda) = \rho_2 - \Lambda, \quad [e_i,e_j] \in B. \tag{3.4c}$$

И, если $1 \leqslant i \leqslant k$, $k+1 \leqslant j \leqslant n$, тогда

$$[e_i,e_j] = 0; \tag{3.5a}$$

$$\rho_1 + \rho_2 - 2\Lambda = \rho_1 - \Lambda, \quad [e_i,e_j] \in A; \tag{3.5b}$$

$$\rho_1 + \rho_2 - 2\Lambda = \rho_2 - \Lambda, \quad [e_i,e_j] \in B. \tag{3.5c}$$

Отметим, что случаи (3.3c) и (3.4b) невозможны, так как A и B — подалгебры Ли по лемме 3.1. Дополнительно, одновременное выполнение (3.3b) и (3.4c), (3.3b) и (3.5b), (3.4c) и (3.5c) влечет $\rho_1 = \rho_2$, т.е. (G,g) является многообразием Эйнштейна, а значит солитон Риччи тривиален.

За вычетом случая одновременного выполнения (3.3a), (3.4a) и (3.5a), который соответствует абелевой алгебре Ли, а значит тривиальному солитону Риччи, остается 6 различных вариантов сочетания этих условий. Они, с помощью переобозначения базисных векторов $\{e_1,\ldots,e_k\} \leftrightarrow \{e_{k+1},\ldots,e_n\}$ и собственных значений $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$ оператора Риччи ρ, сводятся к следующим трем случаям:

1. $\Lambda = \rho_2$, $[A,A] = 0$, $[B,B] = 0$, $[A,B] \subset A$.

2. $\Lambda = \rho_2$, $[A, A] = 0$, $[B, B] \subset B$, $[A, B] \subset A$.

3. $\Lambda = \rho_2$, $[A, A] = 0$, $[B, B] \subset B$, $[A, B] = 0$.

Рассмотрим одновременно случаи 1 и 2. В силу ограничений на скобки Ли, приведенных выше, выполняется:

$$1 \leqslant i, j \leqslant k \ \Rightarrow \ c_{ij}^h = 0,$$
$$k+1 \leqslant i, j \leqslant n, \ 1 \leqslant h \leqslant k \ \Rightarrow \ c_{ij}^h = 0,$$
$$1 \leqslant i \leqslant k, \ k+1 \leqslant j, h \leqslant n \ \Rightarrow \ c_{ij}^h = 0.$$

Пункт 2 леммы 3.1, в частности, означает, что $c_{ih}^i = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant k$, $k+1 \leqslant h \leqslant n$.

Вычислим $\rho_1 = \rho_i^i \,|_{1 \leqslant i \leqslant k}$ с помощью формулы (3.2), с учетом приведенных ограничений:

$$\rho_1 = \rho_i^i \,|_{1 \leqslant i \leqslant k} =$$
$$= \sum_{h=1}^{k} \sum_{s=k+1}^{n} \left(\frac{1}{4} \varepsilon_i \varepsilon_h \varepsilon_s \left(\left(c_{is}^h \right)^2 + \left(c_{hs}^i \right)^2 \right) + + \frac{1}{2} \varepsilon_s c_{is}^h c_{hs}^i \right) +$$
$$+ \sum_{h=k+1}^{n} \sum_{s=1}^{k} \left(\frac{1}{4} \varepsilon_i \varepsilon_h \varepsilon_s \left(\left(c_{hs}^i \right)^2 - 3 \left(c_{ih}^s \right)^2 \right) + + \frac{1}{2} \varepsilon_h c_{ih}^s c_{hs}^i \right).$$

Выполняя замену $h \leftrightarrow s$ во второй сумме, получим

$$\rho_1 = \sum_{h=1}^{k} \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{2} \varepsilon_i \varepsilon_h \varepsilon_s \left(\left(c_{hs}^i \right)^2 - \left(c_{is}^h \right)^2 \right).$$

Но из пункта 2 леммы 3.1 следует, что $\left(c_{hs}^i \right)^2 = \left(c_{is}^h \right)^2$ при $1 \leqslant i, h \leqslant k$, $k+1 \leqslant s \leqslant n$. Значит $\rho_1 = 0$.

Следовательно, по теореме 3.1, выполняется $k = 1$. Но тогда из пункта 2 леммы 3.1 следует, что $[A, B] = 0$, что приводит к случаю 3.

Для доказательства теоремы осталось заметить, что в третьем случае A — абелев идеал, B — идеал, $\langle A, B \rangle = 0$ и $\mathfrak{g} = A + B$ как векторное пространство. Значит $\mathfrak{g} = A \oplus B$ и $G = \mathbb{R}^k \otimes \mathcal{N}^{n-k}$ — прямое произведение евклидова пространства и эйнштейнового многообразия, а следовательно алгебраический солитон Риччи тривиален.

Отметим, что, в силу теоремы 3.1, в третьем случае $k = 1$ и $G = \mathbb{R}^1 \otimes \mathcal{N}^{n-1}$.

■

В случае групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой оператор Риччи всегда диагонализируем, т.к. его матрица в ортонормированном базисе симметрична. А значит, справедливо следствие теоремы 3.2.

Следствие 3.1. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной конформно плоской римановой метрикой g размерности $n \geqslant 4$. Тогда, если (G, g) — алгебраический солитон Риччи, то (G, g) — тривиальный солитон Риччи.*

Так же, с учетом леммы 1.1 и теоремы 1.2, справедливо

Следствие 3.2. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной конформно плоской римановой метрикой g размерности $n \geqslant 4$. Тогда, если (G, g) — однородный инвариантный солитон Риччи, то (G, g) — тривиальный солитон Риччи.*

Замечание. *Примером четырехмерной группы Ли с левоинвариантной конформно плоской лоренцевой метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи является группа Ли $\mathbb{R} \ltimes H$ (полученная в классификации конформно плоских однородных псевдоримановых пространств [27]), где H — трехмерная группа Гейзенберга, в алгебре Ли которой существует псевдоортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ со времени подобным e_4, в котором структурные уравнения имеют вид:*

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_2] = c_1 e_3 + c_1 e_4, \\
&[e_1, e_3] = -[e_1, e_4] = -\frac{1}{2} c_2 e_1 - c_1 e_2 - c_3 e_3 - c_3 e_4, \\
&[e_3, e_4] = \frac{2c_2^2 + 1}{2c_2} \left(e_3 + e_4 \right), \\
&[e_2, e_3] = -[e_2, e_4] = -c_2 e_2 + c_4 e_3 + c_4 e_4,
\end{aligned}$$

где c_1, c_3, c_4 — произвольные действительные константы и $c_2 \neq 0$. Опера-

тор Риччи в данном базисе имеет вид

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и, очевидно, не является диагонализируемым. Константа Λ *в уравнении алгебраического солитона Риччи в данном случае равна нулю.*

Заключение

В ходе проведенного исследования решены поставленные задачи и достигнуты следующие результаты:

1. Получен отрицательный ответ на вопрос о существовании нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

2. С помощью обобщенных базисов Дж. Милнора получена классификация алгебраических солитонов Риччи на 4-мерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

3. Доказана теорема о том, что все алгебраические солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой конформно плоской метрикой и диагонализируемым оператором Риччи являются тривиальными.

Литература

[1] Бессе А. *Многообразия Эйнштейна*: пер. с англ.: в 2 т. — М: 1990.

[2] Hamilton R.S. *The Ricci flow on surfaces* // Contemporary Mathematics. — 1988. — Vol. 71. — P. 237–261.

[3] Cao H.-D. *Recent progress on Ricci solitons* // Advanced Lectures in Mathematics. — 2010. — Vol. 11. — P. 1–38.

[4] Arroyo R.M., Lafuente R. *Homogeneous Ricci solitons in low dimensions* // Int Math Res Notices. — 2014. — Vol. 2015, No. 13. — P. 4901–4932.

[5] Cerbo L.F. *Generic properties of homogeneous Ricci solitons* // Adv. Geom. — 2014. — Vol. 14(2). — P. 225–237.

[6] Lauret J. *Ricci soliton homogeneous nilmanifolds* // Math. Ann. — 2001. — Vol. 319, No. 4. — P. 715–733.

[7] Onda K. *Examples of Algebraic Ricci Solitons in the Pseudo-Riemannian Case* // Acta Mathematica Hungarica. — 2014. — Vol. 144, No. 1. — P. 247–265.

[8] Громол Д., Клингенберг В., Майер В. *Риманова геометрия в целом.* — М. : Мир, 1971. — 344 с.

[9] Wang M. *Einstein metrics from symmetry and bundle constructions* // Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds. Lectures on geometry and topology. Suppl. J. Differ. Geom. — 1999. — Vol. 6. — P. 287–325.

[10] Lauret J. *Einsten solvmanifolds and nilsolitons, New development in Lie theory and geometry* // Contemp. Math. — 2009. — Vol. 491. — P. 1–35.

[11] Alexeevskii D.V., Kimel'fel'd B.N. *Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature* // Funktional. Anal. i Pril. — 1975. — Vol. 9, No. 2. — P. 5–11.

[12] Petersen P., Wylie W. *On gradient Ricci solitons with symmetry* // Proc. Amer. Math. Soc. — 2009. — Vol. 137, No. 6. — P. 2085–2092.

[13] Ivey T. *Ricci solitons on compact three-manifolds* // Differential Geometry and Applications. — 1993. — Vol. 3, No. 4. — P. 301–307.

[14] Lauret J. *Ricci soliton solvmanifolds* // Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik. — 2011. — Vol. 650. — P. 1–21.

[15] Jablonski M. *Homogeneous Ricci solitons are algebraic* // Geometry, Topology. — 2014. — Vol. 18, No. 4. — P. 2477–2486.

[16] Lafuente R., Lauret J. *Structure of homogeneous Ricci solitons and the Alekseevskii conjecture* // J. Differential Geom. — 2014. — Vol. 98, No. 2. — P. 315–347.

[17] Batat W., Onda K. *Algebraic Ricci Solitons of three-dimensional Lorentzian Lie groups* // arxiv.org — 2012. — arXiv:1112.2455.

[18] Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. *Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай* // Мат. труды. — 2008. — Т. 11, № 2. — С. 115–147.

[19] Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. *Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай* // Мат. труды. — 2009. — Т. 12, № 1. — С. 40–113.

[20] Мубаракзянов Г.М. *О разрешимых алгебрах Ли* // Изв. вузов. Матем. — 1963. — № 1. — С. 114–123.

[21] Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. *Построение обобщенных базисов Милнора некоторых четырехмерных метрических алгебр Ли* // Известия АлтГУ. — 2015. — № 1/1(85). — С. 75–78.

[22] Kodama H., Takahara A., Tamaru H. *The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling* // Manuscripta math. — 2011. — Vol. 135. — P. 229–243.

[23] Calvaruso G., Kowalski O. *On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds* // Cent. Eur. J. Math. — 2009. — Vol. 7(1). — P. 124–139.

[24] Honda K. *Conformally Flat Semi-Riemannian Manifolds with Commuting Curvature and Ricci Operators* // Tokyo J. Math. — 2003. — Vol. 26, No. 1. — P. 241–260.

[25] Honda K., Tsukada K. *Conformally flat homogeneous Lorentzian manifolds* // Proceedings of the conference "GELOGRA", Granada (Spain). — 2011. — P. 40.

[26] Honda K., Tsukada K. *Conformally Flat Homogeneous Lorentzian Manifolds* // Recent Trends in Lorentzian Geometry. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2013. — Vol. 26. — P. 295–314.

[27] Calvaruso G., Zaeim A. *Conformally flat homogeneous pseudo-riemannian four-manifolds* // Tohoku Math. J. — 2014. — Vol. 66. — P. 31–54.

Работы автора по теме дипломной работы

[28] Клепиков П.Н., Пастухова С.В., Родионов Е.Д. *Об операторе Риччи левоинвариантных лоренцевых метрик трехмерных групп Ли* // Материалы 53-й международной научной студенческой конференции "МНСК–2015": Математика. НГУ, Новосибирск, 2015. — 2015. — С. 50.

[29] Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. *Исследование однородных солитонов Риччи на группах Ли малой размерности с помощью систем компьютерной математики* // "Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования". Тезисы докладов Российской научной конференции. Владикавказ, 2015. — Изд.: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. — 2015. — С. 62.

[30] Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. *Об однородных инвариантных солитонах Риччи на четырехмерных группах Ли* // Сборник трудов всероссийской конференции по математике "МАК–2015". АлтГУ, Барнаул, 2015. — Изд.: АлтГУ. — 2015. — С. 21–24.

[31] Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. *О вычислении однородных солитонов Риччи на группах Ли малых размерностей* // "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования". Тезисы докладов XII Международной научной конференции. Владикавказ, 2015. — Изд.: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. — 2015. — С. 196.

[32] Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. *Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли* // Известия АлтГУ. — 2015. — № 1/2. — С. 115–122.

[33] Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. *Исследование однородных солитонов Риччи с помощью обобщенных базисов Дж.Милнора* // "Дни геометрии в Новосибирске — 2015": Тезисы Международной конференции. Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 2015. — 2015. — С. 26–27.

[34] Клепиков П.Н. *Алгебраические солитоны Риччи на конформно плоских группах Ли* // Сборник научных статей международной конференции "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования". Барнаул, 20-24 октября, 2015. — Изд.: АлтГУ. — 2015. — С. 483–490.

[35] Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. *Об однородных солитонах Риччи* // Сборник научных статей международной конференции "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования". Барнаул, 20-24 октября, 2015. — Изд.: АлтГУ. — 2015. — С. 508–513.

[36] Клепиков П.Н. *Конформно плоские алгебраические солитоны Риччи на группах Ли* // Сборник трудов всероссийской конференции "Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники". АлтГУ. Барнаул, 24-26 ноября, 2015. — Изд.: АлтГУ. — 2015. — С. 95–102.

[37] Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. *Однородные пространства с метрикой солитона Риччи* // Сборник трудов всероссийской конференции "Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники". АлтГУ. Барнаул, 24-26 ноября, 2015. — Изд.: АлтГУ. — 2015. — С. 426–431.

[38] Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. *Об однородных солитонах Риччи* // Избранные труды международной конференции "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования". Барнаул, 20-24 октября, 2015. — Изд.: АлтГУ. — 2015. — С. 51–56.

[39] Клепиков П.Н. *Алгебраические солитоны Риччи на конформно плоских группах Ли* // Избранные труды международной конференции "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования". Барнаул, 20-24 октября, 2015. — Изд.: АлтГУ. — 2015. — С. 123–130.

[40] Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. *Об однородных солитонах Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой* // Доклады академии наук. — 2015. — Т. 465, № 3. — С. 281–283.

[41] Klepikov P.N., Oskorbin D.N., Rodionov E.D. *Homogeneous Ricci Solitons on Four-Dimensional Lie Groups with a Left-Invariant Riemannian Metric* // Doklady Mathematics. — 2015. — Vol. 92, No. 3. — P. 701–703.

[42] Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. *Конформно плоские солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой* // Известия АлтГУ. — 2016. — № 1(89). — С. 123–128.