них двух групп, используя теоремы из [1] было получено, что эти группы принадлежат квазимногообразию, порожденному свободной группой $F2$. Также, пользуясь результатами из [5], была доказана следующая

Теорема. Пусть G – 4-порожденная группа из квазимногообразия M с циклическим коммутантом, $G\in M$. Если квазимногообразие $N(G,v)$ имеет аксиоматический ранг 4, то оно определяется квазитождеством $\Phi = (\forall x1)(\forall x2)(\forall x3)(\forall x4)([x4,x3] = [x2,x1]$ & $[x4,x2] = 1$ & $[x4,x1] =1$ & $[x3,x2] = 1$ & $[x3,x1] = 1 \rightarrow [x2,x1] = 1)$.

Библиографический список

1. Будкин А.И. Квазимногообразия групп: монография. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2002. – 339 с.
2. Будкин А.И. Квазимногообразия групп: учебное пособие. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 1992. – 59 с.
3. Будкин А.И. Аксиоматический ранг квазимногообразия, содержащего свободную разрешимую группу // Матем. сб. – 1980. – Т. 112, №4. – С. 647–655.
4. Будкин А.И. Аксиоматический ранг квазимногообразия правоупорядочиваемых групп // Алгебра и логика. – 1986. – Т. 25, №5. – С. 499–507.
5. Половникова Е.С. Об аксиоматическом ранге квазимногообразий // Сиб. матем. ж. – 1999. – Т. 40, №1. – С. 167–176.
6. Лебедев А.А. О квазимногообразиях групп аксиоматического ранга не выше трех // МАК-2015: сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015. – С. 11.

УДК 512.54

О классе Леви, порожденном почти абелевым квазимногообразием нильпотентных групп

В.В. Лодейщикова
АлтГТУ им. И.И. Ползунова, г. Барнаул

Для произвольного класса групп M обозначим через $L(M)$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(x)^G$ любого элемента x из G принадлежит M. Класс $L(M)$ групп будем называть классом Леви, порожденным M.

Классы Леви были введены в работе Л.К. Каппе [1] под влиянием работы Ф. Леви [2], в которой дана классификация групп с абелевыми нормальными замыканиями вида $(x)^G$. Р.Ф. Морсом [3] доказано, что если M – многообразие групп, то $L(M)$ также многообразие групп. Из работы А.И. Будкина [4] следует, что если M – квазимногообразие групп, то $L(M)$ также является квазимногообразием групп.

Как обычно, qK – квазимногообразие, порождённое классом групп K (пишем qG, если $K = G$). Обозначим через N_c – многообразие нильпотентных групп ступени не выше c, через $F_n(M)$ – свободную группу ранга n в квазимногообразии M.

А.И. Будкин [4] доказал, что если K – произвольное множество нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядков 2 и 5, и в каждой группе из K централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой, то $L(qK)\subseteq N_3$. В действительности, в доказательстве этого результата отсутствие элементов порядка 5 нужно было только для установления того, что всякая 3-порожденная группа из $L(qK)$ нильпотентна класса ≤ 4, поэтому в работе А.И. Будкина и Л.В. Тараниной [5] данный результат был усилен и доказана аналогичная теорема для произвольного множества нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядка 2.

А.И. Будкиным [6], доказано, что если – нильпотентное квазимногообразие, $\overline{M}$ – множество всех конечно-порождённых групп из M, то выполняется равенство $L(q\overline{M}) = qL(\overline{M})$. Там же установлено, что если N – класс всех конечно-порождённых нильпотентных групп, N_0 – класс всех конечно-порождённых нильпотентных групп без кручения, то аналогичное утверждение неверно, и справедливы строгие включения $qN_0 \subset L(qN_0)$ и $qN \subset L(qN)$ откуда, в частности, следуют неравенства $L(qN_0) \neq qL(N_0)$ и $L(qN) \neq qL(N)$.

В работе А.И. Будкина [6] также показано, что квазимногообразия $L(qN)$, $L(qN_0)$ замкнуты относительно свободных произведений, каждое из этих квазимногообразий содержит не более одного максимального собственного подквазимногообразия и что если квазимногообразие M замкнуто относительно свободных произведений, то таковым же является квазимногообразие $L(M)$.

Рассмотрим группы, имеющие следующие представления в N_2:

$$H_p = gr\left(x, y \mid [x, y]^p = 1\right), \; H_{p^s} = gr\left(x, y \mid [x, y]^p = x^{p^s} = y^{p^s} = 1\right),$$

где s – натуральное число, p – простое число.

Набор qH_{p^s} (исключая qH_{2^1}), qH_p, $qF_2(N_2)$ (p – простое число), представляет собой полный список почти абелевых квазимногообразий нильпотентных групп (т.е. неабелевых квазимногообразий нильпотентных групп, все собственные подквазимногообразия которых абелевы). В работах [7–9] найдены описания классов Леви, порожденных почти абелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп (исключая $L(qH_2)$).

С.А. Шаховой в [10] доказано, что квазимногообразие $L\left(qH_{p^2}\right)$ конечно аксиоматизируемо.

В [9] доказано, что если K – произвольный класс нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 2^n (n – фиксированное натуральное число, $n \geq 2$) с коммутантами экспоненты 2 и в каждой группе из K элементы порядка 2^m $(0 < m < n)$ содержатся в центре этой группы, то класс Леви, порожденный квазимногообразием qK, совпадает с многообразием нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 2^n.

Также в [9] было доказано существование класса K такого, что K – класс нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 8 с коммутантами экспоненты 2 и во всякой группе из K централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, – абелева подгруппа, но класс $L(qK)$ содержит нильпотентную группу ступени 3.

В [11] установлено существование класса K такого, что во всякой группе из K централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, – абелева подгруппа, но класс $L(qK)$ содержит нильпотентную группу ступени 4.

В [12] найдено описание класса Леви, порождённого многообразием групп экспоненты $2p$ с коммутантом экспоненты p, в которых квадраты элементов перестановочны (p – простое число, $p \neq 2$).

В [13] доказано, что для локально конечного многообразия групп M, класс Леви, порождённый M, также является локально конечным многообразием. Дано описание подпрямо неразложимых групп, принадлежащих классу Леви, порожденному многообразием групп экспоненты $2p$ с коммутантом экспоненты p, в которых квадраты элементов перестановочны (p – простое число, $p \neq 2,3$).

Также в [13] показано, что любая группа, принадлежащая классу Леви, порожденному многообразием групп экспоненты $2p$ с коммутантом экспоненты p, в которых квадраты элементов перестановочны (p – простое число, $p \neq 2$), является 3-метабелевой группой.

Настоящая работа продолжает исследования классов Леви. Основным результатом данной работы является:

Теорема. Класс $L(qH_2)$ содержит нильпотентную группу ступени 3.

Библиографический список

1. Kappe L.C. On Levi-formation // Arch. Math. – 1972. – V. 23, №6. – P. 561–572.

2. Levi F.W. Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic condition // J. Indian Math. Soc. – 1942. – V. 6. – P. 87–97.

3. Morse R.F. Levi-properties generated by varieties // The mathematical legacy of Wilhelm Magnus. Groups, geometry and special functions (Contemp. Math., 169), Providence, RI, Am. Math. Soc. – 1994. – P. 467–474.

4. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сибирский математический журнал. – 1999. – Т. 40, №2.– С. 266–270.

5. Будкин А.И., Таранина Л.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. – 2000. – Т. 41, №2.– С. 270–277.

6. Будкин А.И. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами// Алгебра и логика. – 2000. – Т. 39, №6.– С. 635–647.
7. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентыми группами // Известия Алтайского государственного университета. – 2009. – Т. 61, №1.– С. 26–29.
8. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порожденных нильпотентыми группами // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, №6.– С. 1359–1366.
9. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. – 2011. – Т. 50, №1.– С. 26–41.
10. Шахова С.А. Об аксиоматическом ранге квазимногообразия $\mathfrak{M}^{p^2}$// Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – Т. 85, №1/2.– С. 179–182. DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-33.
11. Лодейщикова В.В. Об одном квазимногообразии Леви экспоненты 8 // Известия Алтайского государственного университета. – 2010. – Т.65, №1/2.– С. 42–45.
12. Лодейщикова В.В. Об одном классе Леви экспоненты 2p // Известия Алтайского государственного университета. – 2014. – Т. 81, №1/2.– С. 45–51. DOI: 10.14258 /izvasu(2014)1.2-07.
13. Лодейщикова В.В. Об одном многообразии Леви экспоненты 2p // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – Т. 85, №1/1.– С. 84–88. DOI: 10.14258 /izvasu(2015)1.1-15.

УДК 512.54.01

Об аксиоматическом ранге класса Леви, порождённого квазимногообразием $\mathbf{qH_{p^s}}$

С.А. Шахова
АлтГУ, г. Барнаул

Множество $T_Q(\mathfrak{M})$ всех квазитождеств, истинных во всех группах из класса $\mathfrak{M}$, называется Q-теорией класса $\mathfrak{M}$. Подмножество $\Sigma \subseteq T_Q(\mathfrak{M})$ называется базисом Q-теории класса $\mathfrak{M}$, если всякое квазитождество из $T_Q(\mathfrak{M})$ является следствием множества Σ квазитождеств. Если данная Q-теория обладает базисом квазитождеств от n переменных и не обладает базисом квазитождеств от меньшего числа переменных, то говорят, что аксиоматический ранг Q-теории равен n. Если такое n существует, то говорят, что аксиоматический ранг Q-теории конечен. Если такого n не существует, то аксиоматический ранг Q-теории считается бесконечным. Класс $\mathfrak{M}$ называется конечно аксиоматизируемым, если $T_Q(\mathfrak{M})$ обладает базисом, состоящим из конечного числа квазитождеств.

Задача изучения аксиоматических рангов квазимногообразий впервые была поставлена Д.М. Смирновым [1]. Вопросам аксиоматизируемости квазимногообразий посвящены работы А.И. Будкина [2–4]. Как следует из этих работ, аксиоматические ранги большого класса неабелевых квазимногообразий, среди которых квазимногообразия, порожденные свободной группой, группой с одним определяющим соотношением, свободной разрешимой группой, оказались бесконечными. Аксиоматические ранги квазимногообразий нильпотентных групп без кручения исследовались Е.С. Половниковой в [5].

Пусть p – простое число, $p \neq 2$, H_{p^s} – группа, имеющая в многообразии нильпотентных ступени не выше 2 групп следующее представление: $H_{p^s} = gr(x, y \,||\, x^{p^s} = y^{p^s} = [x,\ y]^p = 1)$. Обозначим через qH_{p^s} – квазимногообразие, порожденное группой H_{p^s}, $\mathfrak{M}^{p^s} = L(qH_{p^s})$ – класс Леви, порожденный квазимногообразием qH_{p^s}, т.е. класс всех групп G, в которых нормальное замыкание x^G любого элемента $x \in G$ принадлежит qH_{p^s}. Классы Леви 2-ступенно нильпотентных квазимногообразий групп изучала В.В. Лодейщикова в [6–8]. В частности, были выписаны квазитождества, задающие квазимногообразие $\mathfrak{M}^{p^s}$. Список этих квазитождеств бесконечен и содержит квазитождества от любого сколь угодно большого числа переменных.

А.И. Будкин поставил вопрос: верно ли, что квазимногообразие $\mathfrak{M}^{p^s}$ имеет конечный аксиоматический ранг? Ответ на этот вопрос оказался положительным. Верна следующая теорема.

Теорема. Квазимногообразие $\mathfrak{M}^{p^s}$ конечно аксиоматизируемо.

Библиографический список

1. Коуровская тетрадь (нерешенные проблемы теории групп). –Новосибирск, 1980.
2. Будкин А.И. О квазитождествах в свободной группе // Алгебра и логика. –1976. – Т. 15, №1. –С. 39–52.
3. Будкин А.И. Квазитождества нильпотентных групп и групп с одним определяющим соотношением // Алгебра и логика. –1979. – Т.18, №2. – С. 127-136.