УДК 514.765

Об операторе секционной кривизны на трехмерных метрических группах Ли

С.В. Клепикова, И.В. Пономарев, О.П. Хромова
АлтГУ, г. Барнаул

Задача об установлении связей между топологией и кривизной риманова многообразия является одной из важных проблем римановой геометрии [1–7].

Работа О. Ковальского и С. Никшевич [8] посвящена решению задачи о предписанных значениях спектра оператора Риччи на трехмерных римановых локально однородных пространствах. В дальнейшем аналогичные результаты для оператора одномерной кривизны, а также для оператора секционной кривизны получены Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым, О.П. Хромовой [9, 10].

В псевдоримановом случае известна работа Дж. Кальварузо, О. Ковальского, в которой исследуется задача о существовании трехмерной группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и заданным оператором Риччи [11].

Тензору кривизны Римана R в любой точке многообразия M можно поставить в соответствие оператор секционной кривизны $K:\Lambda_x^2 M \to \Lambda_x^2 M$, определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, K(T \wedge V)\rangle_x = R_x(X, Y, T, V),$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – индуцированное скалярное произведение в слоях $\Lambda_x^2 M$ пространства расслоения $\Lambda^2 M$, определяемое правилом

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2\rangle = \det\left(g_x\left(X_i, Y_j\right)\right).$$

В отличие от случая римановой метрики, где всегда существует базис, в котором матрица самосопряженного оператора (например K) диагональна, в псевдоримановом случае приходится учитывать не только сами собственные значения (которые могут быть и комплексными, и действительными), но и их алгебраическую и геометрическую кратность. Возможны различные варианты известные как *типы Сегре* (см. [11]):

1. Тип Сегре $\{111\}$: K имеет три действительных собственных значения (возможно совпадающих), каждому из которых соответствует одномерное собственное подпространство
2. Тип Сегре $\{1z\bar{z}\}$: K имеет одно действительное и два комплексно сопряженных собственных значения.
3. Тип Сегре $\{21\}$: K имеет два действительных собственных значения (возможно совпадающих), первый из которых имеет алгебраическую кратность 2, каждому из которых соответствует одномерное собственное подпространство.
4. Тип Сегре $\{3\}$: K имеет одно действительное собственное значение алгебраической кратности 3 и соответствующее ему одномерное собственное подпространство.

Данные исследования являются продолжением работы Дж. Кальварузо, О. Ковальского [11]. В работе доказаны аналогичные теоремы для оператора секционной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Так, например, была доказана следующая теорема.

Теорема. *Трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и заданным оператором секционной кривизны* K, *который имеет тип Сегре* $\{3\}$, *существует в том и только в том случае, если данное собственное значение отрицательно.*

Идея доказательства

Используя классификацию трехмерных алгебр Ли с лоренцевым скалярным произведением и удобные для вычислений базисы, приведенные в работах [4, 11–13], можно показать, что оператор секционной кривизны имеет тип Сегре $\{3\}$ тогда и только тогда, когда в алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой что

$$[e_1, e_2] = e_1 - \lambda e_3,\ [e_1, e_3] = -e_1 - \lambda e_2,\ [e_2, e_3] = \lambda e_1 + e_2 + e_3,$$

$$g=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Вычислим в данном базисе матрицу оператора секционной кривизны с помощью математической модели описанной в работах [14–17]:

$$K=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\lambda^2&\lambda&-\lambda\\ \lambda&2-\frac{1}{4}\lambda^2&-2\\ \lambda&2&-2-\frac{1}{4}\lambda^2\end{pmatrix}.$$

Прямые вычисления показывают, что оператор K имеет тип Сегре $\{3\}$ тогда и только тогда, когда $\lambda\neq 0$, причем тогда он имеет собственное значение $k_1=-\frac{1}{4}\lambda^2<0$.

Отметим, что данный результат естественно обобщается на случай трехмерных локально однородных лоренцевых многообразий.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: № 16–01–00336А, № 16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна / в 2 т. ; пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

2. Rodionov E.D. Standard homogeneous Einstein manifolds // Доклады Академии наук. – 1993. – Т. 328, №2. – С. 147.

3. Родионов Е.Д., Славский В.В. Одномерная секционная кривизна римановых многообразий // Доклады Академии наук. – 2002. – Т. 387, №4. – С. 454.

4. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Левоинвариантные лоренцевы метрики на 3-мерных группах Ли с нулевым квадратом длины тензора Схоутена-Вейля // Вестник Алтайского государственного педагогического университета. – 2004. – №4–3. – С. 53–60.

5. Воронов Д.С., Родионов Е.Д. Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 432, № 3. – С. 301–303.

6. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О спектре оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 450, №2. – С. 140.

7. Клепикова С.В., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Об оператора кривизны метрических групп Ли // Известия АлтГУ. – 2016. – №1/1(89). – С. 129–137.

8. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedicata. – 1996. – №1. – P. 65–72.

9. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О спектре оператора кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. – 2013. – Т. 450. №3. – С. 271–273.

10. Гладунова О.П., Оскорбин Д.Н. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Известия АлтГУ. – 2013. – №1/1. – С. 19–23.

11. Calvaruso G., Kowalski O. On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds // Cent. Eur. J. Math. – 2009. – V. 7(1). – P. 124–139.

12. Клепиков П.Н., Клепикова С.В., Хромова О.П. О спектре операторов одномерной кривизны левоинвариантных лоренцевых метрик трехмерных групп Ли // Известия АлтГУ. – 2016. – №1/1(89). – С. 117–122.

13. Клепиков П.Н., Пастухова С.В., Хромова О.П. О собственных значениях оператора тензора Риччи левоинвариантных лоренцевых метрик на трехмерных метрических группах Ли // «Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники». Сборник трудов всероссийской конференции, АлтГУ, 2015. – Изд.: АлтГУ. – С. 11–19.

14. Клепиков П.Н., Пастухова С.В., Хромова О.П. О собственных значениях оператора тензора кривизны Риччи левоинвариантных лоренцевых метрик трехмерных групп Ли // МАК-2015: «Математики – Алтайскому краю» : сборник трудов всероссийской конференции по математике, АлтГУ. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015. – С. 26–29.

15. Пастухова С.В., Хромова О.П. Применение пакетов аналитических вычислений к исследованию сигнатур операторов кривизны левоинвариантных лоренцевых метрик трехмерных групп Ли // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования : тезисы докладов XII Международной научной конференции. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2015. – С. 219.

16. Клепиков П.Н., Пастухова С.В., Родионов Е.Д. Хромова О.П. О программной составляющей в задачах исследования сигнатур операторов тензоров кривизны на метрических группах Ли // Алгебра, анализ и смеж-

ные вопросы математического моделирования : тезисы докладов Российской научной конференции. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2015. – С. 63.
17. Пастухова С.В., Хромова О.П. О сигнатуре оператора тензора одномерной кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками // МАК-2015: «Математики – Алтайскому краю» : сборник трудов всероссийской конференции по математике, АлтГУ. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015. – С. 32–34.

UDC 514.764.2

Conformally flat splines

M.V. Kurkina[1], E.D. Rodionov[2], V.V. Slavsky[1]
[1]Ugra State University, Khanti-Mansiisk;
[2]Altai State University, Barnaul

The interior of the unit ball corresponds to the Lobachevsky space in the Klein's model. Convex subsets in Lobachevsky space coincide with the usual convex subsets of the unit ball. However, the convex geometry of Lobachevskii space is more substantial in analytical plan.

In particular, one can naturally associate an arbitrary compact convex subset Q with conformally flat metric $ds^2 = \dfrac{dx^2}{h_Q^2(x)}$, $x \in R^{n-1}$, of bounded one-dimensional sectional curvature $K(x,\xi)$, which is defined on $\overline{R^{n-1}}$ [1]:

$$-\frac{\kappa}{2} \le K(x,\xi) = h_Q \frac{d^2 h_Q}{d\xi^2} - \frac{1}{2} |\nabla h_Q|^2 \le \frac{\kappa}{2}, \qquad (1)$$

where $h_Q(x)$ is a positive function of the class $C^{1,1}$ defining conformally flat metric, ∇h_Q is the gradient of $h_Q(x)$ satisfying to the Lipschitz's condition, $\dfrac{d^2 h_Q}{d\xi^2}$ is the second derivative of function h_Q, in sense F. Clark [2], along arbitrary unit vector $\xi \in R^{n-1}$, $\kappa > 0$ is a positive constant such that $(-\kappa)$ is the curvature of Lobachevsky space.

In this paper we call such functions as support functions for a convex set Q (see also [3-4]). In the case of a finite convex polyhedron of Lobachevsky space the following formula is true

$$h_Q(x) = \min_i \left\{ h_{\Delta_i}(x) \right\}, \qquad (2)$$

where $h_{\Delta_i}(x)$ are support functions of $(n-1)$ dimensional sides of the border of Q.

Calculation of functions $h_{\Delta_i}(x)$ occurs recurrently and reduced to the case when Δ_i are k-dimensional simpleksa ($k < n$). Such functions will be called elementary conformal splines [3].

In contrast to the conventional presentation of spline functions, the representation (2) of the function $h_Q(x)$ via conformally flat spline functions has another nature, since not required to specify the domain of definition $h_{\Delta_i}(x)$. Function $h_Q(x)$ has smoothness $C^{1,1}$, and any function $f \in C^1$ can be arbitrarily closely approximated via function $h_Q(x)$ of the form (2) in the norm of C^1 – space on a compact subset (for sufficiently large κ). The obvious formula (2) for the function $h_Q(x)$ allows us to simplify calculation and to make its more effective: it isn't need to break the domain of definition of $h_Q(x)$, and it is possible to use parallel algorithms for calculation of elementary splines. In work [4] the algorithm of calculation is realized in MatLab and Mathematica packages.

In a one-dimensional case the graph of function $h_Q(x) = \min\limits_{i=1,..,4} \left\{ h_{\Delta_i}(x) \right\}$ composed of four one-dimensional splines is represented in figure 1. Each spline $h_{\Delta_i}(x)$ corresponds to the segment Δ_i in Lobachevsky's plane (see figure (2)).