Например, для цилиндра

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos u \\ Y = \dfrac{1}{2}\sin u \\ Z = v \end{cases} \tag{4}$$

вектор нормали будет равен $n = \left(\frac{1}{2}\cos u, \frac{1}{2}\sin u, 0\right)$. Определим точки, в которых вектор нормали будет перпендикулярен плоскости проекции $X + Y + Z = 0$. Для этого решим уравнение

$$\frac{1}{2}(\cos u + \sin u) = 0.$$

Решения этого уравнения дадут нам уравнения изображений образующих цилиндра:

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Дополним чертеж основаниями, аналогично построению изображения экватора сферы.

На рисунке 2 приведен пример изображения кривой Вивиани, которая является линией пересечения поверхности цилиндра (4) со сферой (3) вдвое большего радиуса, центр которой лежит на поверхности цилиндра. Построения выполнялись в программе Geogebra.

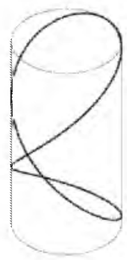

Рисунок 2 – Изображение цилиндра и кривой Вивиани

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: № 16–01–00336А, № 16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Библиографический список

1. Бескин Н.М. Изображения пространственных фигур. – М.: Наука, 1971. – 80 с.
2. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2002. – 472 с.
3. Фоменко А.Т. Наглядная геометия и топология: математические образы в реальном мире / 2-е изд. – М., 1998. – 416 с.
4. Энциклопедия элементарной математики. Кн. 4 (геометрия) / под ред. П.С.Александрова, А.И.Маркушевича и А.Я.Хинчина. – М.: Физматгиз, 1963. – 568 с.

УДК 514.7

О солитонах Риччи на трёхмерных и четырёхмерных многообразиях Уокера

Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, И.В. Эрнст
АлтГУ, г. Барнаул

Солитоны Риччи были введены Ричардом Гамильтоном в работе [1]. Они соответствуют самоподобным решениям потока Риччи.

Метрики солитонов Риччи являются обобщениями эйнштейновых метрик и поэтому представляют интерес в теоретической физике.

Сформулируем основные определения.

Определение. Псевдориманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется солитоном Риччи, если на $\mathcal{M}$ существует гладкое векторное поле X, являющееся решением уравнения:

$$\pounds_X g + \rho = \lambda g,$$

где ρ – тензор Риччи, λ – константа, $\pounds_X$ – производная Ли вдоль X.

λ называется константой солитона. Солитон называют расширяющимся, стабильным, сжимающимся, если $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ соответственно.

В настоящей работе мы строим новые примеры солитонов Риччи на лоренцевых многообразиях Уокера малой размерности.

Определение. Псевдоримановым многообразием называется гладкое многообразие $\mathcal{M}$ размерности n, на котором задан гладкий знаконеопределённый невырожденный симметричный тензор g.

Если метрический тензор g имеет сигнатуру $(1, n-1)$, то $(\mathcal{M}, g)$ называется лоренцевым многообразием.

Определение. Гладкое распределение $\mathcal{D}$ называется параллельным, если для любых векторных полей $X \in \mathcal{D}$ имеем $\nabla_Y X \in \mathcal{D}$, где Y есть произвольное гладкое векторное поле на $\mathcal{M}$.

Определение. Псевдориманово многообразие, допускающее гладкое параллельное распределение изотропных (т.е. $g(X, X) = 0$) векторов, называется многообразием Уокера.

В работе [2] доказана

Теорема. *Любое трёхмерное симметрическое лоренцево многообразие Уокера является солитоном Риччи для произвольной константы* λ.

Справедлива

Теорема. *Существуют трёхмерные лоренцевы несимметрические многообразия Уокера, являющиеся солитонами Риччи.*

Схема доказательства:

Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – трёхмерное лоренцево многообразие Уокера. Тогда, как показано в [3], существуют локальные координаты (t, x, y), в которых метрика g принимает вид:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \varphi(x, y) \end{pmatrix},$$

где $\varphi(x, y)$ – некоторая гладкая на $\mathcal{M}$ функция. Тензор Риччи имеет вид:

$$\rho = -\frac{1}{2}\varphi_{xx} dy^2$$

Полагая $X = (A(t, x, y), B(t, x, y), C(t, x, y))$, запишем уравнение солитона в координатах (t, x, y):

$$\begin{cases} \frac{1}{2}C_t & = & 0 \\ C_x + B_t & = & 0 \\ C_y + C_t\varphi + A_t & = & \lambda \\ 2B_x & = & \lambda \\ C_x\varphi + B_y + A_x & = & 0 \\ 2C_y\varphi + 2A_y + B\varphi_x + C\varphi_y - \frac{1}{2}\varphi_{xx} & = & \lambda\varphi \end{cases}$$

Далее, следуя [2], эта система уравнений упрощается и преобразуется к виду:

$X(t, x, y) = \left(t(\lambda - \beta) - x\omega'(y) + \mu(y), \frac{1}{2}\lambda x + \omega(y), \beta y + \gamma \right)$ где β, γ – константы, а ω, μ – гладкие функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнению:

$$(2\beta - \lambda)\varphi + 2\mu'(y) - 2x\omega''(y) + \varphi_y(\beta y + \gamma) + \varphi_x\left(\frac{\lambda}{2}x + \omega(y)\right) = \frac{1}{2}\varphi_{xx}$$

Пусть теперь $C(t, x, y) \equiv 0$, $\lambda \neq 0$, $\omega \neq 0$. Тогда уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2}\varphi_{xx} - \varphi_x\left(\frac{\lambda}{2}x + \omega(y)\right) + \lambda\varphi - 2\mu'(y) + 2x\omega''(y) = 0$$

Уравнение выше есть ОДУ, зависящее от y как от параметра. Оно имеет всюду определённое решение:

$$\varphi(x,y)=\left(\lambda-(\lambda x+2\omega(y))^2\right)F(y)+\frac{2}{\lambda}\mu'(y)+\frac{\omega''(y)(\lambda x^2-1)}{\omega(y)\lambda}$$

где $F(y)$ – произвольная гладкая функция. Тензор Риччи для этого решения может быть выбран произвольной гладкой функцией, зависящей от y :

$$\rho=\left(\lambda^2F(y)-\frac{\omega''(y)}{\omega(y)}\right)dy^2,$$

поэтому полученная метрика в общем случае не является симметрической. Теорема доказана.

Переходим к четырёхмерным солитонам.

Пусть $(\mathcal{M},g)$ – конформно-плоское четырёхмерное многообразие Уокера. В работе [4] доказана следующая теорема, позволяющая использовать удобную систему координат:

Теорема. *Пусть* $(\mathcal{M},g)$ *– конформно-плоское локально неразложимое многообразие Уокера размерности* $n+2\geq 4$*, алгебра голономии которого изоморфна* $\mathbb{R}^n$.

Тогда существуют локальные координаты $(v,x^1,\dots,x^n,u)$*, в которых метрика задаётся формулой:*

$$g=2dudv+\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2+a(u)\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2(du)^2.$$

Применив эту теорему при $n=2$, получим систему координат (v,x,y,u) на $\mathcal{M}$.

Далее приведён пример солитона в предположении $a(u)=e^u$.

$X=(K,L,M,N)$ – гладкое векторное поле на $\mathcal{M}$.

$$K(v,x,y,u)=-(c_2x+c_4y)e^{\frac{1}{2}u}I_1\left(2e^{\frac{1}{2}u}\right)+(c_3x+c_5y)e^{\frac{1}{2}u}K_1\left(2e^{\frac{1}{2}u}\right)+\lambda v+c_6+e^u$$

$$L(v,x,y,u)=\frac{1}{2}\lambda x+c_1y+c_2I_0\left(2e^{\frac{1}{2}u}\right)+c_3K_0\left(2e^{\frac{1}{2}u}\right)$$

$$M(v,x,y,u)=-c_1x+\frac{1}{2}\lambda y+c_4I_0\left(2e^{\frac{1}{2}u}\right)+c_5K_0\left(2e^{\frac{1}{2}u}\right)$$

$N(v,x,y,u)=0$, где $I_\nu(z),K_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно. c_i – константы.

Векторное поле X, являющееся решением уравнения солитона, может быть найдено для произвольной гладкой функции $a(u)$, это эквивалентно следующей теореме:

Теорема. *Пусть* $(\mathcal{M},g)$ *– конформно-плоское локально неразложимое четырёхмерное многообразие Уокера, алгебра голономии которого изоморфна* $\mathbb{R}^n$*. Тогда уравнение солитона на* $\mathcal{M}$ *имеет решение.*

Дальнейшую информацию о работах по солитонам Риччи и инвариантным тензорным полям можно найти в работах [5–9].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: № 16-01-00336А, № 16-31-00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Библиографический список

1. Hamilton R. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. – 1988. – V.71. – P. 237–261.

2. Brozos-Vazquez M., Garcia-Rio E., Gilkey P., Nikcevic S. and Vazquez-Lorenzo R. The geometry of Walker manifolds // Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics 5, Morgan & Claypool Publ. 2009. 177 p.

3. Walker A.G. Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes. Quarterly Journal of Mathematics. – 1950. –Т. 1, №1. – С. 69.

4. Галаев А.С. Конформно плоские лоренцевы многообразия со специальными группами голономии // Матем. сборник. – 2013. – Т. 204(9). – С. 29-50.

5. Гладунова О.П., Оскорбин Д.Н. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Известия Алтайского государственного университета. – 2013. – №1/1 (77). – С. 19–23.

6. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – Т. 2, №1. – С. 115–122.

7. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Обобщенные базисы Милнора некоторых четырехмерных метрических алгебр Ли // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования : сборник научных статей международной конференции. – 2014. – С. 298-302.
8. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. О вычислении спектра оператора кривизны конформно (полу)плоских римановых метрик // Известия Алтайского государственного университета. – 2013. – № 1/2 (77). – С. 028–031.
9. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О спектре оператора кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 450, №3. – С. 271.

UDC 514.765

Some problems in the theory of homogeneous spaces

E.D.Rodionov
Altai State University, Barnaul

Since a homogeneous space (M,ρ) is geodesically complete, there arises the problem on the behavior of geodesic curves on such spaces, their closure, and on their self-intersection. The following theorem is known in this direction.

Theorem *1 (see [1, 2]). Geodesics on homogeneous spaces are merely closed curves or unclosed curves without self-intersections.*

Moreover, the following theorem is proved in the work [2] of M.V.Mechsheryakov.

Theorem 2. *Geodesic curves of a left-invariant metric on a connected and simply connected nilpotent Lie group are not closed.*

The following two problems arise in a natural way:

Problem 1 *(A. Besse). Find homogeneous Riemannian manifolds all of whose geodesics are closed.*

Problem 2. *Describe homogeneous Riemannian manifolds all of whose geodesics are unclosed.*

For the first time, the Besse problem was considered in the class of normal homogeneous spaces, i.e., those spaces $(G/H, \rho)$ whose homogeneous Riemannian metric ρ is obtained from the Ad(G)-invariant inner product of a Lie group G under the projection $\pi : G \to G/H$. The following theorem was proved in [3].

Theorem *3 (see [3]). Let $(G/H, \rho)$ be a simply connected, normal homogeneous Riemannian spaceall of whose geodesics are closed. Then $(G/H, \rho)$ is isometric to a compact symmetric space of rank 1 (CSROS: S^n, CP^k, HP^m, and CaP^2).*

Later on, by using purely topological methods, the following theorem was proved in [3] for arbitrary homogeneous Riemannian manifolds.

Theorem 4 *(see [3]). A simply connected homogeneous Riemannian manifold all of whose geodesicsare closed and have the same length is isometric to a CSROS.*

Simultaneously, a geometric proof of this theorem having no requirement on the lengths of geodesics was given [4, 5].

Theorem 5 *(see [4, 5]). A simply connected Riemannian manifold all of whose geodesics are closed is isometric to a CSROS.*

The main idea of the proof of Theorem 5 is as follows. If the structure of $(G/H, \rho)$ is complicated, then we seek a flat totally geodesic torus T in $M = G/H$ whose irrational winding is unclosed. Then a finite list of manifolds remains, which is examined step-by-step.

The following conjecture is closely related to the Besse conjecture.

Conjecture 1 *(W.Klinkenberg, see [6]). On a simply connected closed manifold, there exist infinitely many geometrically distinct closed geodesics.*

Although there is still no final answer to the W.Klinkenberg conjecture in the general case, the following theorem holds for homogeneous Riemannian spaces.

Theorem 6 *(see [7]). Let M be a compact, simply connected, homogeneous space not diffeomorphic to a CSROS. Then any Riemannian metric on M admits infinitely many geometrically distinct closed geodesics. If on M, there exists a Riemannian metric ρ such that all geodesics emanating from a certain point p return to this point before a certain common period t, then M is diffeomorphic to a CSROS.*

After the appearance of these works, there naturally arose the problem on the closures of geodesic curves on homogeneous Riemannian spaces. In the case of naturally reductive spaces, it was studied in [8].

Theorem 7 *(see [8]). Let G and H be compact and connected Lie groups, G/H be naturally reductive, $\gamma(t)$ is a geodesic of G/H. Then the closure of $\gamma(t)$ either is simply a closed curve or is isometric to a flat torus of dimension not less than 2.*