и, существует такой z, что

$$\forall i, j \quad \rho\left(x_j, z\right) < \rho\left(y_i, z\right), \tag{1}$$

где ρ –метрика в R. Тогда можно так образовать группы для χ^2*, что в каждой из них окажутся лишь элементы одного из классов.*

Доказательство. Рассмотрим $r = \max_j \rho\left(z, x_j\right)$. Тогда из (1) следует, что в интервалах $[z-r, z] = \Delta_i$ и $[z, z+r] = \Delta_{i+1}$ не содержится не одного элемента из Y. Также в этих интервалах содержатся все элементы X, не содержится не одного элемента из Y. Также в этих интервалах содержатся все элементы X. Эти интервалы включим в число строящихся для работы критерия Пирсона, остальные интервалы можно строить произвольным образом. Лемма доказана.

Из этой леммы немедленно вытекает следующий результат.

Теорема. *Пусть заданы два класса объектов* $X, Y \subset R$ *с условием (1). Тогда можно разбить числовую прямую на интервалы так, что по этому разбиению критерий Пирсона отвергнет гипотезу однородности.*

При доказательстве теоремы проверяется, что на построенных в лемме интервалах статистика критерия Пирсона принимает свое теоретически максимально возможное значение $p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2$ Эта теорема дает повод считать, что в описанной ситуации при построении интервалов для работы критерия хи-квадрат произвольным образом значение статистики критерия будет если и не максимально возможным, то близким к нему. Таким образом, по крайней мере, в случае ярко выраженной неоднородности классический и новый алгоритм дадут одинаковые результаты.

Библиографический список

1. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.

2. Андреева В.Н., Дронов С.В. Визуализация иерархических кластерных алгоритмов // Сборник трудов семнадцатой региональной конференции по математике «МАК-2014», посвященной 40-летию факультета математики и информационных технологий. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2014. – С. 16–19.

УДК 514.182

Методы изображения геометрических фигур

Д.И. Оглезнев, И.В. Пономарев

АлтГУ, г. Барнаул

В процессе визуализации результатов решения большого числа задач, часто требуются изображения различных трехмерных геометрических тел. При этом исследователь сталкивается с проблемой наиболее наглядного представления получаемых тел на плоскости. Эта задача осложняется еще и тем, что не все графические компьютерные программы обладают возможностью представления трехмерных объектов.

Для изображения трехмерных геометрических тел на плоскости обычно используют параллельное или центральное проектирование. Задача заключается в том, чтобы по координатам точек оригинала (X, Y, Z) получить координаты точек изображения (x, y). В методе параллельных проекций используют следующую теорему [1].

Теорема 1. Координаты точки-изображения суть линейные функции координат точки-оригинала, т. е.

$$\begin{aligned} x &= a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + d_1; \\ y &= a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + d_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ – некоторые постоянные коэффициенты. Согласно теореме Польке-Шварца [4], для построения однозначного изображения достаточно задать проекции четырех некомпланарных точек. Например, при ортогональном проектировании на плоскость $X + Y + Z = 0$ точки

$O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ будут иметь соответственно координаты $(0;0)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $(0;1)$, и формулы для получения точек изображения будут иметь вид

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}(Y - X);$$
$$y = \frac{1}{2}(2Z - X - Y). \quad (2)$$

Для иллюстрации применения данного метода, построим изображение сферы

$$\begin{cases} X = \cos v \cdot \cos u \\ Y = \cos v \cdot \sin u \\ Z = \sin v \end{cases} \quad (3)$$

Для этого построим изображение экватора ($v = 0$). Возьмем на экваторе точки через интервал в 30° и по формуле (2) вычислим координаты их изображений (см. таблицу 1).

Таблица 1 – Результаты вычисления координат изображения экватора сферы (3)

№	u	X	Y	Z	x	y
1	0	1,000	0,000	0,000	-0,866	-0,500
2	30	0,866	0,500	0,000	-0,317	-0,683
3	60	0,500	0,866	0,000	0,317	-0,683
4	90	0,000	1,000	0,000	0,866	-0,500
5	120	-0,500	0,866	0,000	1,183	-0,183
6	150	-0,866	0,500	0,000	1,183	0,183
7	180	-1,000	0,000	0,000	0,866	0,500
8	210	-0,866	-0,500	0,000	0,317	0,683
9	240	-0,500	-0,866	0,000	-0,317	0,683
10	270	0,000	-1,000	0,000	-0,866	0,500
11	300	0,500	-0,866	0,000	-1,183	0,183
12	330	0,866	-0,500	0,000	-1,183	-0,183

Изменяя значения параметра v, получим изображения других параллелей сферы. Соединяя соответствующие точки получаем изображения сферы (рисунок 1).

Рисунок 1 – Изображение сферы

Также определенный интерес при изображении трехмерных объектов представляет определение линии очерка, т.е. линии на поверхности, отделяющую видимую часть поверхности или грани от невидимой ее части. При переходе через линию очерка нормаль поверхности меняет направление по отношению к линии взгляда, таким образом, в точках линии очерка нормаль поверхности ортогональна линии взгляда. В общем случае у поверхности линий очерка может быть несколько. Каждая линия очерка является пространственной кривой. Она или замкнута, или оканчивается на краях поверхности [2].

Например, для цилиндра

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos u \\ Y = \dfrac{1}{2}\sin u \\ Z = v \end{cases} \tag{4}$$

вектор нормали будет равен $n = \left(\frac{1}{2}\cos u, \frac{1}{2}\sin u, 0\right)$. Определим точки, в которых вектор нормали будет перпендикулярен плоскости проекции $X + Y + Z = 0$. Для этого решим уравнение

$$\frac{1}{2}(\cos u + \sin u) = 0.$$

Решения этого уравнения дадут нам уравнения изображений образующих цилиндра:

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Дополним чертеж основаниями, аналогично построению изображения экватора сферы.

На рисунке 2 приведен пример изображения кривой Вивиани, которая является линией пересечения поверхности цилиндра (4) со сферой (3) вдвое большего радиуса, центр которой лежит на поверхности цилиндра. Построения выполнялись в программе Geogebra.

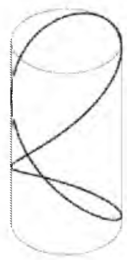

Рисунок 2 – Изображение цилиндра и кривой Вивиани

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: № 16–01–00336А, № 16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Библиографический список

1. Бескин Н.М. Изображения пространственных фигур. – М.: Наука, 1971. – 80 с.
2. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2002. – 472 с.
3. Фоменко А.Т. Наглядная геометия и топология: математические образы в реальном мире / 2-е изд. – М., 1998. – 416 с.
4. Энциклопедия элементарной математики. Кн. 4 (геометрия) / под ред. П.С.Александрова, А.И.Маркушевича и А.Я.Хинчина. – М.: Физматгиз, 1963. – 568 с.

УДК 514.7

О солитонах Риччи на трёхмерных и четырёхмерных многообразиях Уокера

Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, И.В. Эрнст
АлтГУ, г. Барнаул

Солитоны Риччи были введены Ричардом Гамильтоном в работе [1]. Они соответствуют самоподобным решениям потока Риччи.

Метрики солитонов Риччи являются обобщениями эйнштейновых метрик и поэтому представляют интерес в теоретической физике.

Сформулируем основные определения.