УДК 514.75

Обмотка тора и модель проективной плоскости

М.А. Чешкова
АлтГУ, г. Барнаул

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности обносится нормальный вектор. Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным, независимо от выбора кривой, то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность.

Простейшей односторонней поверхностью является лист Мебиуса. К односторонним поверхностям относятся также бутылка Клейна, скрещенный колпак, Римская поверхность. В [1–5] изучаются односторонние поверхности.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π-периодической вектор-функцией $\rho = \rho(u)$, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической.

Так как $\rho(u) = \rho(u + 4\pi)$, то вектор-функция $s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho_1(u))$, где $\rho_1(u) = \rho(u + 2\pi)$ есть 2π-периодическая не равная нулю, а вектор-функция $l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho_1(u))$ есть 2π-антипериодическая не равная нулю.

Определим поверхность P уравнением

$$r(u,v) = (1 + \cos(v))s(u) + \sin(v)l(u), \tag{1}$$
$$u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi].$$

Теорема. *Поверхность P есть модель проективной плоскости.*

Следствие. *Пусть вектор-функция $r = r(u,v)$ определяет модель проективной плоскости, а функция $f = f(u,v)$ удовлетворяет следующим условиям*

1) $f(u,v)$ *не обращается в нуль на промежутке* $[-\pi, \pi]$,

2) $f(\pi,v) = f(-\pi, = v), f(u,\pi) = f(-u,-\pi)$.

Тогда вектор-функция $r^*(u,v) = f(u,v)r(u.v)$ *также определяет модель проективной плоскости.*

Рассмотрим тор

$$r(u,v) = ((a + b\cos(u))\cos(v), (a + b\cos(u))siv(v), b\sin(u)).$$

Зададим линию $u = \frac{kv}{2}$, где k нечетное число.

Вектор-функция

$\rho(v) = ((a + b\cos(\frac{kv}{2}))\cos(v), (a + b\cos(\frac{kv}{2}))\sin(v), b\sin(\frac{kv}{2}))$ – 4π-периодическая, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической (обмотка тора).

Положим $a = 2, b = 1$ и построим обмотку тора, где $u = v/2, u = 3v/2$ (рисунок 1). Назовем ее обмоткой тора первого типа.

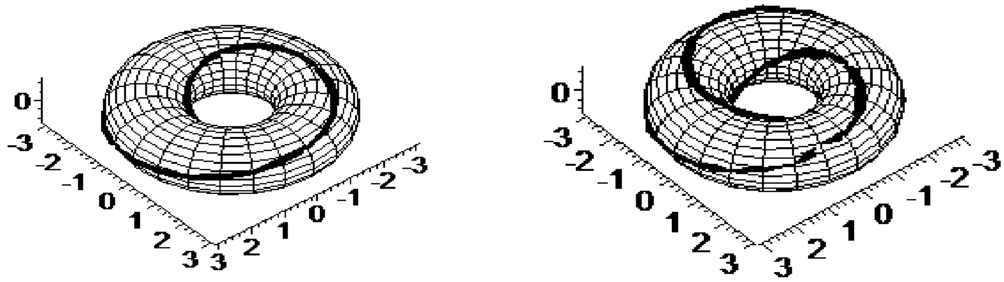

Рисунок 1 – Обмотка тора первого типа, u=v/2, u=3v/2

Имеем

$$s(v) = (2\cos(v), 2\sin(v), 0),$$
$$l(v) = (\cos(kv/2)\cos(v), \cos(kv/2)\sin(v), \sin(kv/2)). \tag{2}$$

Уравнение (1) примет вид

$$r(u,v) = (1+\cos(v))(2\cos(u), 2\sin(u), 0)) +$$
$$\sin(v)(\cos(ku/2)\cos(u), \cos(ku/2)\sin(u), \sin(ku/2)),$$
$$u \in [-\pi,\pi],\ v \in [-\pi,\pi] \qquad (3)$$

Построим поверхность (3), полагая $k = 1$ (рисунок 2).

Поверхность (3) называется скрещенным колпаком [3].

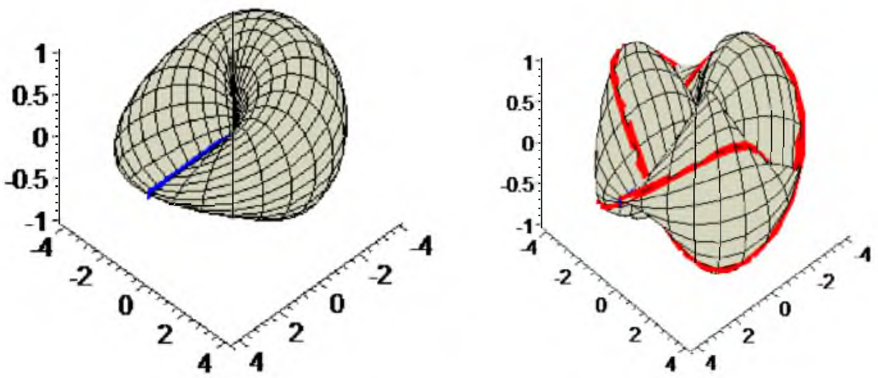

Рисунок 2 – Скрещенный колпак, $k = 1, k = 3$

При k >1 получим перекрученную поверхность.

Утверждение. Если кривая $\rho = \rho(u)$ есть обмотка тора первого типа, то поверхность (1) есть скрещенный колпак.

Построим обмотку тора, где $v = u/2, v = 3u/2$ (рисунок 3). Назовем ее обмоткой второго типа.

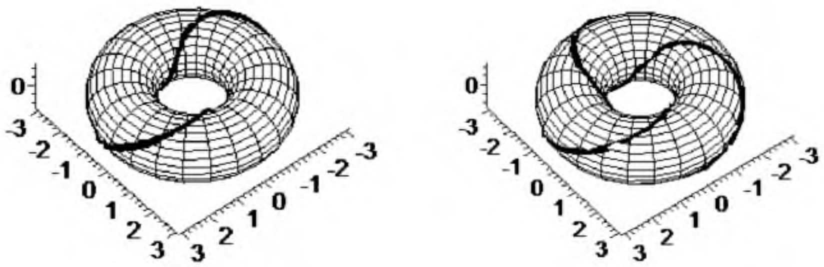

Рисунок 3 – Обмотка тора второго типа , u=v/2, u=3v/2

Имеем

$$s(u) = (0, 0, \sin(u)),$$
$$l(u) = (2+\cos(u))\cos(ku/2), (2+\cos(u)\sin(ku/2), 0). \qquad (4)$$

Уравнение (1) примет вид

$$r(u,v) = (1+\cos(v))(2\cos(u), 2\sin(u), 0) +$$
$$\sin(v)(\cos(ku/2)\cos(u), \cos(ku/2)\sin(u), \sin(ku/2)),$$
$$u \in [-\pi,\pi],\ v \in [-\pi,\pi]. \qquad (5)$$

Построим поверхность (5), полагая $k = 1$ (рис, 4).

Поверхность называется Римской [3].

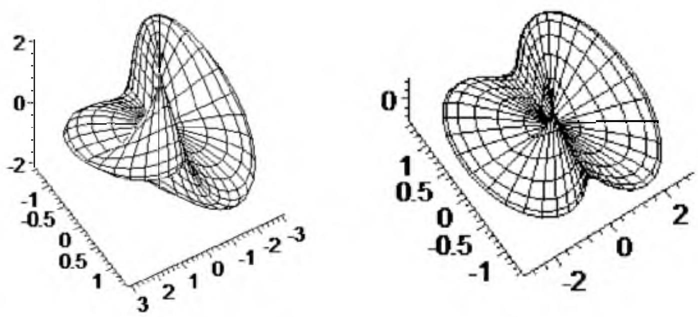

Рисунок 4 – Римская поверхность

Утверждение. *Если кривая $\rho = \rho(u)$ есть обмотка тора второго типа, то поверхность (1) есть Римская поверхность*

Применим следствие к теореме. Рассмотрим функцию

$$f(u,v) = 1/(2+\sin(3u/2)\sin(v)). \qquad (6)$$

и построим деформацию скрещенного колпака и Римской поверхности (рисунок 5).

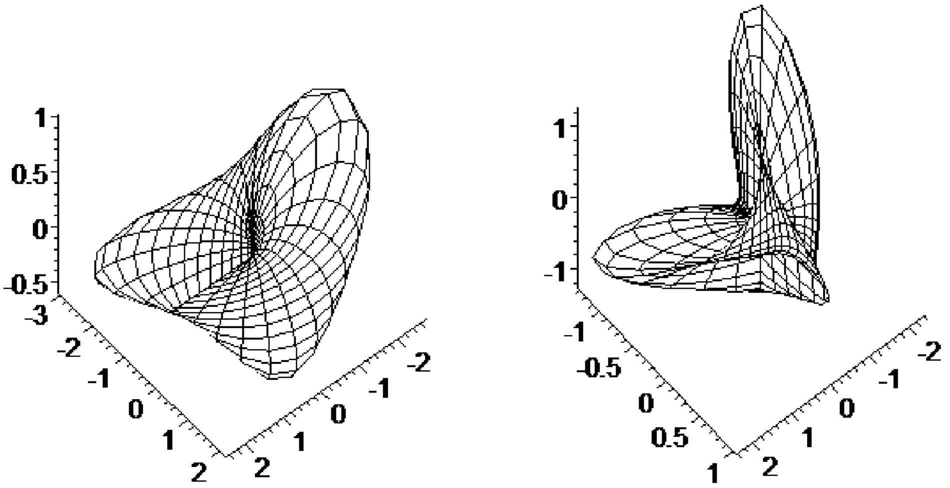

Рисунок 5 – Деформация скрещенного колпака и Римской поверхности

Библиографический список

1. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко А.Т. Введение в топологию. – М., 1995.

2. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М., 1981.

3. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. – М., 2006.

4. Чешкова М.А. О бутылке Клейна // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2012. №1/1, – С. 130-135.

5. Чешкова М.А. Обмотка тора и лист Мебиуса // МАК–2014: сборник трудов семнадцатой региональной конференции по математике. – Барнаул, 20014. – С. 37–40.