

Секция 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

УДК 551.345+539.3

Автомоделное решение задачи о движении фронта вечной мерзлоты

А.С. Алейников, А.Г. Петрова
АлтГУ, г. Барнаул

Работа посвящена построению точных решений одномерной задачи тепломассопереноса в ненасыщенном грунте. Точное решение строится в двух вариантах постановки задачи: без учета силы тяжести, и с её учетом.

Математическое описание процессов тепломассопереноса делается на основе методов механики сплошных сред и включает уравнения, являющиеся следствиями законов сохранения массы, импульса, энергии и замыкающих уравнений состояния. Модель строится в следующих предположениях: вода и лед несжимаемые; воздух – вязкий совершенный газ; температура и давление общие для скелета и пор; поверхность грунта подвержена воздействию выпадающего с определенной скоростью и температурой дождя [1, 2].

Согласно [1], считаем, что область между дневной поверхностью и фронтом протаивания занята грунтом, который рассматривается как пористая среда с неподвижным скелетом и порами, заполненными воздухом и водой. В области инфильтрации осадков выполнены следующие уравнения относительно неизвестных функций S – влагонасыщенности, плотности воздуха в порах ρ_a , температуры T и давления P .

$$\begin{aligned} n\rho_w \frac{\partial}{\partial t} S_w + \rho_w \frac{\partial}{\partial x} v_w &= 0, n \frac{\partial}{\partial t} \rho_a (1 - S_w) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_a v_a) = 0, \\ (\rho C)_m \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} [P(v_a + v_w)] + (\rho_w C_w v_w + \rho_a C_a v_a) \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_m \frac{\partial T}{\partial x} \right), \\ v_i &= - \frac{k f_i(S_w)}{\mu_i} (P_x - \rho_i g), P = \rho_a R T, j = a, w, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_m &= n S_i \lambda_i + n(1 - S_i) \lambda_a + (1 - n) \lambda_s, \\ (\rho C)_m &= n S_i \rho_i C_i + n(1 - S_i) \rho_a C_a + (1 - n) \rho_s C_s. \end{aligned}$$

В мерзлом грунте лед в порах и сам скелет неподвижны, следовательно, выполнены следующие уравнения:

$$\begin{aligned} n \rho_i \frac{\partial}{\partial t} S_i &= 0, n \frac{\partial}{\partial t} \rho_a (1 - S_w) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_a v_a) = 0, \\ v_a &= - \frac{k f_a(S_i)}{\mu_a} (P_x - \rho_a g), P = \rho_a R T, \\ (\rho C)_f \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} [P \cdot v_a] + \rho_a C_a v_a \cdot \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_f \frac{\partial T}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_f &= n S_i \lambda_i + n(1 - S_i) \lambda_a + (1 - n) \lambda_s, \\ (\rho C)_f &= n S_i \rho_i C_i + n(1 - S_i) \rho_a C_a + (1 - n) \rho_s C_s. \end{aligned}$$

Здесь: ρ_i, ρ_w, ρ_a – плотности льда, воды и воздуха, μ_w, μ_a – коэффициенты вязкости, C_w, C_a, C_s – удельные теплоемкости, k, q – проницаемость и удельная скрытая теплота фазового перехода, R – универсальная газовая постоянная, n – пористость.

Нижние индексы a, w, i, s относятся к характеристикам воздуха, воды, льда и скелета грунта соответственно, нижние индексы m, f указывают на усредненную (эффективную) характеристику соответственно талого и мерзлого грунта, которая здесь вычисляется как средневзвешенная [3].

На границе фазового перехода $x = s(t)$ выполнены условия непрерывности температуры и давления

$$[T] = 0, [P] = 0,$$

условие фазового равновесия

$$T^* = T_{eq}(P),$$

где зависимость от температуры и давления считается линейной. Кроме того, выполнены следующие условия, являющиеся следствиями сохранения:

$$\begin{aligned} \left(S_w - \frac{S_i \rho_i}{\rho_w} \right) \dot{s}(t) &= -\frac{k}{n\mu_w} f_w(S_w) \frac{\partial}{\partial x} P_m(s(t), t), \\ (S_w - S_i) \dot{s}(t) &= -\frac{k}{n\mu_a} \left(f_a(S_i) \frac{\partial}{\partial x} P_f - f_a(S_w) \frac{\partial}{\partial x} P_m \right); \\ nS_i \rho_i q \dot{s}(t) &= \lambda_f \frac{\partial}{\partial x} T_f(s(t), t) - \lambda_m \frac{\partial}{\partial x} T_m(s(t), t). \end{aligned}$$

Последнее условие – это условие Стефана [4], в котором q – удельная скрытая теплота фазового перехода. Будем искать решение, для которого все поры в мерзлом грунте заняты льдом, а температура тождественно равна температуре фазового перехода (однофазная задача).

В целях численного исследования исходная система (1) будет приведена к безразмерному виду и рассмотрена в постановках с учетом силы тяжести и так же без нее.

Введем автомодельную переменную $\xi = x - ct$. Будем рассматривать задачу тепломассопереноса в талом грунте и найдем решение при отрицательных значениях переменной ξ .

Считая все искомые функции функциями единственной переменной, перепишем исходные уравнения:

$$\begin{aligned} n\rho_w \frac{dS}{d\xi}(-c) + \rho_w \frac{d}{d\xi}(v_w) &= 0; \quad -cn \frac{d}{d\xi} \rho_a(1 - S_w) + \frac{d}{d\xi}(\rho_a v_a) = 0; \\ v_i &= -\frac{kf_i(S)}{\mu_i} (P_\xi - \rho_i g), \quad P = \rho_a RT, \quad j = a, w, \\ -c \cdot \frac{d}{d\xi}((\rho C)_m T) + \frac{d}{d\xi}[P(v_a + v_w)] + \frac{d}{d\xi}((\rho_w C_w v_w + \rho_a C_a v_a)T) &= \\ &= \frac{d}{d\xi} \left(\lambda_m \frac{\partial}{\partial \xi} T \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Для полученной системы (2) поставим начальные условия

$$S(0) = S_0, T(0) = T_0, T_\xi(0) = H,$$

$$P(0) = P_0, P_\xi(0) = Y.$$

В физических переменных эти условия соответствуют условиям на границе раздела фаз $\xi = 0$.

Введем безразмерные величины:

$$\tilde{v}_w = v_w / v^*, \tilde{v}_a = v_a / v^*, \tilde{P} = P / P_{at}, \tilde{T} = T / T_{abs}, \tilde{\rho}_a = \rho_a / \frac{P_{at}}{RT_{abs}} = \rho_a / 1,275,$$

$$V = c / v^*, \tilde{\xi} = \xi / L$$

Значения параметров $v^* = 10^{-5}$, $L = 10$, $v^* L = 10^{-4}$ выбираем согласно [1].

Давление исключается из системы путем использования уравнения состояния идеального газа.

Приведем полученную систему (2) без учета силы тяжести к двум уравнениям относительно $T(\xi), S(\xi)$.

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} T(\xi) = \left(\frac{1}{\lambda_m} ((T(\xi) - T(0)) \cdot (-c \cdot (1-n) \cdot \rho_s \cdot C_s + C_1 \cdot C_w + C_2 \cdot C_a + R \cdot C_2) + \right. \\ \left. + (T(\xi) \cdot (R \cdot (\rho_a(S(\xi)) \cdot c \cdot n + \frac{\rho_a(S(\xi))}{\rho_w} \cdot C_1)) - T(0) \cdot ((R \cdot (\rho_a(S(0)) \cdot c \cdot n + \frac{\rho_a(S(0))}{\rho_w} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{d}{d\xi} S(\xi) = \frac{(C_1 + V \cdot S(\xi) \cdot n) \rho_a(S(\xi)) \cdot R \cdot T(\xi) \cdot S(\xi)}{5 \cdot S(\xi) \rho_s(S(\xi)) \cdot R \cdot T(\xi)} \right) \right) \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{P_{at} L v^*}{T_{abs} \lambda}; \quad \sigma = \frac{L v^* \rho_s C_s (1-n)}{\lambda}; \\ C_1 &= v_w(0) - n \cdot V \cdot S(0); \\ C_2 &= v_a(0) - n \cdot V \cdot (1 - S(0)); \end{aligned}$$

$$C_3 = \sigma \cdot \left(\frac{C_w}{\rho_s \cdot C_s \cdot (1-n)} \cdot C_1 + \frac{C_a}{\rho_s \cdot C_s \cdot (1-n)} \cdot C_2 - V \right) + \chi \cdot P(0) \cdot (v_w(0) + v_a(0)) - \frac{d}{d\xi} T(0).$$

Для вычисления C_3 и постановки задачи Коши для системы, необходимо задать значения

$$S(0) = S_0, T(0) = 1, P(0) = P_0, T'(0), P'(0).$$

Эти величины предлагается найти из условий на фронте для однофазной задачи, в которой насыщенность в твердой фазе равна единице.

$$\dot{s}(1-S) = -\frac{k}{n\mu_a} f_a(S_0) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{P}_m(s(t), t);$$

$$\left(S_0 - \frac{\rho_i}{\rho_w} \right) \dot{s}(t) = -\frac{k}{n\mu_w} f_w(S_0) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{P}_m(s(t), t); \quad (4)$$

$$n\rho_i q \dot{s}(t) = -(nS_0 \lambda_w + n(1-S_0) \lambda_a + (1-n) \lambda_s) \cdot \frac{\partial}{\partial x} T(s(t), t).$$

Значения параметров для которых проводились расчеты приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Значения параметров

μ_w	10^{-3}	k	10^{-12}	C_a	10^3
μ_a	$0.0182 \cdot 10^{-3}$	V	$10^{-2}; 0.5 \cdot 10^{-2}; 10^{-3}$	C_s	$0.92 \cdot 10^3$
ρ_i	910	q	$3.34 \cdot 10^5$	P_{atm}	10^5
ρ_w	10^3	λ_w	0.58	T_{abs}	283K
ρ_s	$2 \cdot 10^3$	λ_a	0.023	g	9.8
n	0.2	C_w	$4.19 \cdot 10^3$	R	287

Записывая (4) в автомодельном случае и в безразмерном виде, из первых двух уравнений получим:

$$V = -275P'(0); (S_0 - 0.91)V = -5P'(0)S_0; \tilde{T}''(0) = 13,9V.$$

Следовательно $S(0) = 0.92685, P'(0) = -0.0036V$.

Будем решать полученную нелинейную автономную систему двух уравнений первого порядка (3), состоящую из двух уравнений относительно $T(\xi), S(\xi)$ с начальными условиями

$$\tilde{T}(0) = 1; S(0) = 0.92685. \quad (5)$$

В работе [5] установлено существование решения, задачи Коши (3), (5) удовлетворяющего условию $0 < S(\xi) < 1$ при малых ξ . Очевидно, что физические ограничения на значения температуры при убывании ξ приводят к необходимости ограничиться отрицательными значениями ξ порядка единицы. Анализ задачи Коши (3), (5) приводит к следующему результату.

Утверждение. Задача Коши (3), (5) имеет на интервале $(-1, 0)$ единственное решение $S(\xi), \tilde{T}(\xi)$, причем

$$S(\xi) \in (0, 1), \tilde{T}(\xi) \in (1, 1.05).$$

Построим решение системы уравнений на интервале $\xi \in (-1, 0)$ для трех различных значений V , используя для решения задачи Коши (3), (5) среду Maple 17.

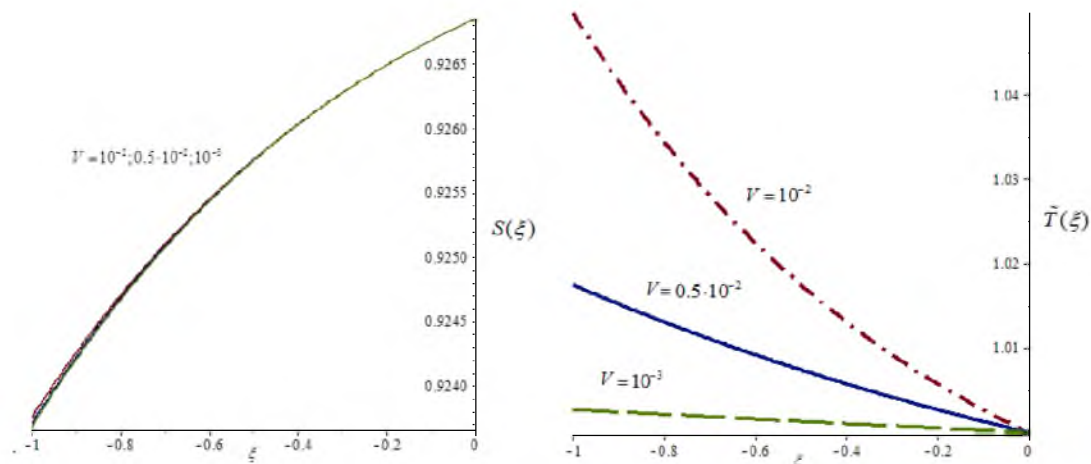


Рисунок 1 – Поведение $S(\xi), \tilde{T}(\xi)$ без учета силы тяжести для значений $V = 10^{-2}; 0.5 \cdot 10^{-2}; 10^{-3}$.

На рисунке 1 приведены профили безразмерной температуры и насыщенности с начальными условиями (5). Отметим, что профиль концентрации не изменяется существенно при изменении па-

раметра V (кривые на левой части Рисунка 1 практически неразличимы). При этом градиент температуры заметно меняется.

Теперь приведем систему (2) с учетом силы тяжести к двум уравнениям относительно $T(\xi), S(\xi)$.

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} T(\xi) = \sigma \left(\frac{C_w C_1}{\rho_s \cdot C_s \cdot (1-n)} + \frac{C_a C_2}{\rho_s \cdot C_s \cdot (1-n)} - V \right) + \chi \cdot \rho_a(\xi) \cdot T(\xi) \cdot (v_w(\xi) + v_a(\xi)) - C_3; \\ \frac{d}{d\xi} S(\xi) = \frac{\left(\frac{(C_1 + V \cdot S(\xi) \cdot n)}{5 \cdot S(\xi)} + \frac{g \cdot \rho_w}{P_{atm}} \right) + \rho_a(S(\xi)) \cdot R \cdot T(\xi)}{\rho_s(S(\xi)) \cdot R \cdot T(\xi)}. \end{cases}$$

Здесь

$$\chi = \frac{P_a L v^*}{T_{abs} \lambda}; \sigma = \frac{L v^* \rho_s C_s (1-n)}{\lambda}; C_1 = v_w(0) - n \cdot V \cdot S(0); C_2 = v_a(0) - n \cdot V \cdot (1-S(0)); C_3 = v_a(0) - n \cdot V \cdot (1-S(0));$$

$$C_3 = \sigma \left(\frac{C_w C_1}{\rho_s \cdot C_s \cdot (1-n)} + \frac{C_a C_2}{\rho_s \cdot C_s \cdot (1-n)} - V \right) + \chi \cdot P(0) \cdot (v_w(0) + v_a(0)) - \frac{d}{d\xi} T(0).$$

Как и ранее для вычисления C_3 и постановки задачи Коши для системы, необходимо задать значения

$$S(0) = S_0, \tilde{T}(0) = 1, P(0) = P_0, \tilde{T}'(0), P'(0).$$

Из системы (4) с учетом силы тяжести g получим:

$$P'_\xi(0) = \frac{g}{P_{atm}} - V \cdot (1-S(0)); \tilde{T}'(0) = 13.9V; S(0) = 0.9982.$$

Запишем итоговую нелинейную систему состоящую из двух уравнений относительно $T(\xi), S(\xi)$ (опуская волны над T):

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} T(\xi) = \sigma \left(\frac{C_w C_1}{\rho_s \cdot C_s \cdot (1-n)} + \frac{C_a C_2}{\rho_s \cdot C_s \cdot (1-n)} - V \right) + \chi \cdot \rho_a(\xi) \cdot T(\xi) \cdot (v_w(\xi) + v_a(\xi)) - C_3; \\ \frac{d}{d\xi} S(\xi) = \frac{\left(\frac{(C_1 + V \cdot S(\xi) \cdot n)}{5 \cdot S(\xi)} + \frac{g \cdot \rho_w}{P_{atm}} \right) + \rho_a(S(\xi)) \cdot R \cdot T(\xi)}{\rho_s(S(\xi)) \cdot R \cdot T(\xi)}. \end{cases} \quad \text{с начальными условиями}$$

$$T(0) = 1; S(0) = 0.9982. \quad (6)$$

Поскольку наличие силы тяжести приводит к увеличению скорости фильтрации, условие ограниченности температуры приводит к необходимости ограничиться интервалом $\xi \in (-0.3, 0)$

Построим решение системы уравнений для таких же значений V , что рассматривались выше.

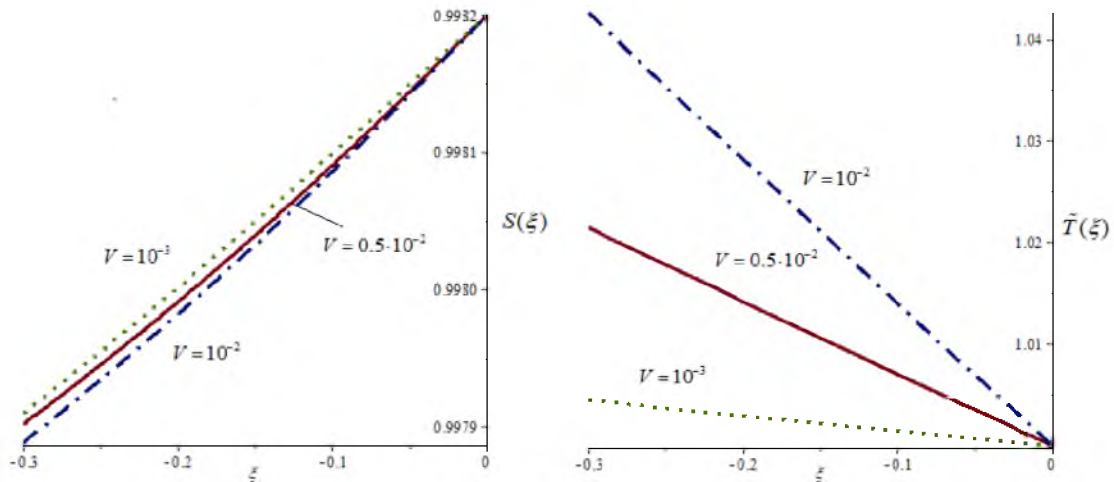


Рисунок 2 – Поведение $S(\xi), \tilde{T}(\xi)$ с учетом силы тяжести для $V = 10^{-2}; 0.5 \cdot 10^{-2}; 10^{-3}$.

Таким образом, возвращаясь к физическим переменным в варианте без учета силы тяжести, решение строилось для пласта талого грунта шириной 10 метров. При этом построены профили температуры и насыщенности для значений

Библиографический список

- Петрова А.Г., Мошкин Н.П., Жирков А.Ф., Задача о возмущениях фазового фронта в ненасыщенном грунте под действием инфильтрации осадков // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – № 1/1 (85). – С. 100–106.

2. Петрова А.Г., Железняк М.Н., Янцен В.В. Автомодельные режимы протаивания насыщенного мёрзлого грунта при выпадении дождя // Известия Алтайского государственного университета. 2014. № 1/1 (81). – С. 109–113.

3. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Ципкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. – М., 1996.

4. Мейрманов А.М. Задача Стефана. – Новосибирск, 1999. – Т. 40, №3.

5. Петрова А.Г., Алейников А.С., Бочкарева Ю.А., Михина Д.Л. О точных решениях задачи протаивания грунта под действием инфильтрации осадков // МАК–2015: Сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул, 2015. – С. 75–78.

УДК 551.345+539.3

Точное автомодельное решение задачи о влагопереносе в деформируемом грунте

И.Г. Ахмерова
АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается процесс фильтрации воды и воздуха в деформируемом грунте. Грунт является трехфазной средой, состоящей из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$) и твердой деформируемой пористой среды ($i = 3$). Уравнения сохранения массы для каждой из фаз, закон Дарси для воды и воздуха и закон сохранения импульса для твердой матрицы с учетом принципа Терцаги, обобщенного закона Гука и эффекта капиллярных сил имеют вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_i^0 s_i m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i^0 s_i m u_i)}{\partial x} &= 0, \quad i = 1, 2; \\ \frac{\partial(\rho_3^0 (1-m))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_3^0 (1-m) u_3)}{\partial x} &= 0; \\ ms(u_1 - u_3) &= -K_0 \frac{k_{01}}{\mu_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \rho_1^0 g \right), \quad s_1 \equiv s, \quad s_2 \equiv 1 - s; \\ m(1-s)(u_2 - u_3) &= -K_0 \frac{k_{02}}{\mu_2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} + \rho_2^0 g \right), \quad p_1 - p_2 = p_c(s); \\ \frac{\partial \sigma_{kl}^f}{\partial x} - (1-m) \frac{\partial P}{\partial x} - (p_1 - p_2) m \frac{\partial s}{\partial x} + K_{23}(u_2 - u_3) + \\ &+ K_{13}(u_1 - u_3) + \rho_3^0 (1-m) g = 0; \\ \sigma_{kl}^f &= (1-m)(\lambda_1 e_{kl} + 2\lambda_2 e_{kl} + \beta_3 K p_c(s) \delta_{kl}). \end{aligned}$$

Здесь u_i – скорость i -ой фазы, ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ ($\alpha_1 = ms_1, \alpha_2 = ms_2, \alpha_3 = 1 - m$); s_1, s_2 – насыщенности воды и воздуха; m – пористость грунта; K_0 – тензор фильтрации; k_{0i} – относительные фазовые проницаемости; μ_i – вязкость i -ой фазы; p_i – давление i -ой фазы; $p_c(s)$ – равновесное капиллярное давление; σ_{kl}^f – полное эффективное напряжение при двухфазном насыщении среды ($\sigma_{kl}^f = \Gamma_{kl} + P \delta_{kl}$); Γ_{kl} – полное напряжение в среде ($\Gamma_{kl} = (1-m)\sigma_{kl} - msp_1 \delta_{kl} - m(1-s)p_2 \delta_{kl}$); σ_{kl} – истинное напряжение твердой фазы, δ_{kl} – единичный тензор, P – полное давление первой и второй фазы ($P = sp_1 + (1-s)p_2$); K_{ij} – коэффициент взаимодействия фаз; $(1-m)\lambda_1, (1-m)\lambda_2$ – коэффициенты Ламе; $(1-m)K$ – модуль всестороннего сжатия сухой пористой среды; e_{kl} – полная деформация пористой среды ($e_{kl} = e_{kl}^f + e_{kl}^p + e_{kl}^s$, $e_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \omega_l}{\partial x_k} \right)$, где $\vec{\omega}$ – вектор перемещения твердых частиц), e_{kl}^p – деформация изменения плотности материала твердых частиц ($e_{kl}^p = -\frac{1}{3} \beta_3 \sigma_{mm} \delta_{mm} \delta_{kl}$, β_3 – коэффициент изотермической сжимаемости материала индивидуальных частиц матрицы), e_{kl}^s –