$$\frac{s\phi}{1-\phi}-\frac{s\phi^-}{1-\phi^-}=\frac{k_{01}}{k}\left(\frac{\phi}{1-\phi}-\frac{\phi^-}{1-\phi^-}\right), \tag{18}$$

в котором $k_{01}=\overline{k_{01}}s^{n_1}$, при $s\in[0;1]$, $n_1>1$, $k_{01}=0$ при $s<0$ и $k_{01}=\overline{k_{01}}=Const$ при $s>1$. Эти свойства k_{01} и представления (18) гарантируют неотрицательность функции $s(\xi)$ при $\phi\in(0;1)$, $s^->0$ (доказательство от противного). Рассмотрим случай преобладания упругих свойств пористой среды. Пусть в (13) $a_1=0$, $a_2=\beta\phi$ и дополнительно $K_0(\phi)=\gamma\frac{\phi}{(1-\phi)^2}$, $\beta=Const>0$, $\gamma=Const>0$. Из (13) выводим что

$$\frac{d}{d\xi}ln\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)=-\beta\frac{dp_e}{d\xi}=\beta\frac{dp}{d\xi}, \tag{19}$$

а из (16) имеем

$$\frac{dp}{d\xi}=\frac{|c|}{\gamma k(s)}\frac{1-\phi}{\phi}\left(\frac{\phi}{1-\phi}-\frac{\phi^-}{1-\phi^-}\right).$$

С учетом (19) приходим к уравнению

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)=\frac{\beta|c|}{\gamma k(s)}\left(\frac{\phi}{1-\phi}-\frac{\phi^-}{1-\phi^-}\right). \tag{20}$$

Решение последнего можно получить в квадратурах. Таким образом решение задачи (11)–(15) дается соотношениями (18), (20).

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №01201460959 и гранта РФФИ №13-08-01097.

Библиографический список

1. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. – М., 1964. – 350 с.
2. Muskat M. The flow of homogeneous fluids through porous media Edwards. Ann Arbor. – 1937. – 782 p.
3. Fowler A. Mathematical geoscience. Springer Verlag London Limited. – 2011. – 904 p.
4. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Temperature-dependent viscoelastic compaction and compartmentalization in sedimentary basins // Tectonophysics. – 2000. – Vol. 324. – P. 137–168.
5. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде // Известия АлтГУ. – 2015. – Вып. 1/2. – С. 131–135.
6. Папин А А., Токарева М. А. Задача о движении сжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде // Известия АлтГУ. – 2011. – Вып. 1/2 (72). – С. 36–43.
7. Ахмерова И Г., Папин А.А., Токарева М А. Математические модели механики неоднородных сред: учебное пособие. –Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2012. – 128 с.
8. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск : Наука, 1983. –315 с.
9. Rudyak V.Ya., Bocharov O.B., Seryakov A.V. Hierarchical sequence of models and deformation peculiarities of porous media saturated with fluids Proceedings of the XLI Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics (APM-2013), July 1-6, St-Petersburg, 2013, pp. 183–190.
10. Антонцев С.Н., Папин А. А. О глобальной гладкости решений уравнений двухфазной фильтрации // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1978. – Вып. 35. – С. 3–28.
11. Бочаров О.Б., Рудяк В.Я., Серяков А.В. Простейшие модели деформирования пороупругой среды, насыщенной флюидами // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2014, №2. – С. 54–68.
12. Ведерников В.В., Николаевский В.Н. Уравнение механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1978. – №5.

УДК 519.6

К методам численного расчета течений стратифицированной жидкости

С.С. Кузиков
АлтГУ, г. Барнаул

Исследование течений неоднородной жидкости представляет интерес как в теоретическом отношении, так и для решений многих практических задач гидроэнергетики, гидрологии, метеорологии и т.д. Наличие вертикального градиента плотности может существенно повлиять на характер течения жидкости. Одним из проявлений указанного фактора является возможность выборочного изъятия определенных слоев водной массы из устойчиво стратифицированного водоема. Обзоры литературы по аналитическим и численным методам исследования стратифицированных течений приводятся в [1–4]. В работах [1, 4] построены решения стационарных уравнений в случае линейной зависимости плотности от функции тока, но они позволяют лишь качественно оценить картину течения. Показано, что при $Fr > \dfrac{1}{\pi}$ областей с возвратным течением нет, а для $Fr < \dfrac{1}{\pi}$ начинается образование таких течений. Авторы работы [7] подобную задачу решили посредством последовательного уточнения границы раздела области селективного отбора и области «возвратного» течения, в которой предполагалось отсутствие течения.

В данной работе предлагается метод численного расчета плоского течения идеальной неоднородной жидкости используя аналитическое представление решения для функции вихря. Указанные течения в поле силы тяжести описываются системой:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \tag{1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g; \tag{2}$$

$$u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

где $(x, y) \in \Omega$, $\Omega -$ ограниченная область в R^2, $u(x,y), v(x,y) -$ компоненты вектора скорости $\bar{u} = (u,v)$, $\rho(x,y) -$ плоскость, $p(x,y) -$ давление, $g -$ величина ускорения силы тяжести.

Пусть ρ_0 – характерная для данной жидкости плотность. Введем новые переменные:

$$u' = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}u, \quad v' = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}v.$$

Функция ψ' и ω' определим следующими соотношениями:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y} = u', \quad \frac{\partial \psi'}{\partial x} = -v', \quad \omega' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial x}$$

и будем называть в дальнейшем функцией тока и вихрем.

С помощью известных преобразований и приведения переменных величин к безразмерному виду система уравнений (1)-(4) принимает следующий вид:

$$u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{1}{Fr^2}\frac{\partial \rho}{\partial x}; \tag{5}$$

$$u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0; \tag{6}$$

$$\Delta\psi = -\omega; \tag{7}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{8}$$

где $Fr = \dfrac{V_0}{\sqrt{gH\dfrac{\Delta\rho}{\rho_0}}} -$ плотностное число Фруда, V_0 – характерная скорость, $H -$ характерный размер области течения, $\Delta\rho = \rho_{\max} - \rho_{\min}$, (штрихи у переменных опущены).

Решение системы (5)–(8) будем искать в области $\Omega = \{(x,y) \in R^2 \,/\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, граница которой состоит из трех участков; Γ^0 – непроницаемая часть; Γ^1 – участок втекания; Γ^2 – участок вытекания, причем

$$\Gamma^0 = \{y = 0, 0 \le x \le 1\} \cup \{y = 1, 0 \le x \le 1\} \cup \{x = 1, 0 \le y \le y_1, y_2 \le y \le 1\};$$

$$\Gamma^1 = \{x = 0, 0 \le y \le 1\};$$

$$\Gamma^2 = \{x = 1, y_1 \le y \le y_2\}, \quad 0 \le y_1 < y_2 \le 1.$$

Для системы дифференциальных уравнений (5)-(8) поставим следующие краевые условия:

На Γ^1:

$$\psi = \psi^1(y), \quad (\frac{\partial \psi^1}{\partial y} > 0), \psi^1(0) = 0, \psi^1(1) = \psi^0;$$
$$\omega = \omega^1(y);$$
$$\rho = \rho^1(y), \quad (0 \le \rho^1 \le 1);$$

На Γ^0:

$$\psi = 0, \quad \{y = 0, 0 \le x \le 1\} \cup \{x = 1, 0 \le y \le y_1\};$$
$$\psi = \psi^0 = const, \quad \{y = 1, 0 \le x \le 1\} \cup \{x = 1, y_2 \le y \le 1\};$$

На Γ^2:

$$\psi = \psi^2(y), \quad (\frac{\partial \psi^2}{\partial y} > 0), \psi^2(y_1) = \psi^1(0), \psi^2(y_2) = \psi^0.$$

В терминах вектора скорости граничные условия означают, что всюду на границе области Ω задана нормальная составляющая вектора скорости и, кроме того, на участке втекания дополнительно известны значения вихря ω и плотности ρ.

Приведем некоторые свойства гладких стационарных решений задачи (5)–(8), используемых при ее численном решении. Из уравнения (6) следует, что $\rho(x, y)$ сохраняет постоянное значение на линии тока $\psi = const$, т.е. $\rho = \rho(\psi)$. Умножая это уравнение на ψ^k, где $k-$произвольное натуральное число, и интегрируя результат по Ω с учетом краевых условий, получим, что

$$\int_0^{\psi^0} \rho(\psi)\psi^k |_{\Gamma^1} d\psi = \int_0^{\psi^0} \rho(\psi)\psi^k |_{\Gamma^2} d\psi.$$

Откуда следует, что

$$\rho(\psi)|_{\Gamma^1} = \rho(\psi)|_{\Gamma^2}. \tag{9}$$

Так как $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{d\psi}\frac{d\psi}{dx} = -\frac{d\rho}{d\psi}v,$ то уравнение (5) представимо в виде $u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Fr^2}\frac{d\rho}{d\psi}v.$

Это уравнение на линиях тока в силу равенств $u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt},$ где $t-$время, имеет вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{Fr^2}\frac{d\rho}{d\psi}\frac{dy}{dt}$$

или

$$d\omega = \frac{1}{Fr^2}\frac{d\rho}{d\psi}dy.$$

Интегрируя это уравнение вдоль линии тока, получим:

$$\omega(\psi, y) = \omega^1(\psi) + \frac{1}{Fr^2}\frac{d\rho(\psi)}{d\psi}(y - y_0(\psi)) \tag{10}$$

где $\omega^1(y)$ и y_0 – значения вихря и ординаты y в точке входа данной линии тока $\psi = const$ в область Ω. Функцию $\rho = \rho(\psi)$ доопределим следующим образом:

$$\rho(\psi) = \rho(0) \text{ если } \psi \le 0; \quad \rho(\psi) = \rho(\psi_1(1)) \text{ при } \psi \ge 1.$$

Для численного решения поставленной задачи в области Ω построим сетку

$$\Omega_h = \{(nh_1, mh_2), n = \overline{0, N}, m = \overline{0, M}, h_1 = \frac{1}{N}, h_2 = \frac{1}{M}\}.$$

Множество граничных узлов обозначим Γ_h.

Уравнение (7) аппроксимируем по обычной пятиточечной схеме

$$\Delta_h \psi_{n,m} = \frac{\psi_{n+1,m} - 2\psi_{n,m} + \psi_{n-1,m}}{h_1^2} + \frac{\psi_{n,m+1} - 2\psi_{n,m} + \psi_{n,m-1}}{h_2^2} =$$
$$= -\omega(\psi_{n,m}, y_m) \tag{11}$$

$n = \overline{1, N-1}, m = \overline{1, M-1}$

Систему алгебраических уравнений (11) замыкаем заданием $\psi_{n,m}$ на Γ_h согласно краевых условий дифференциальной задачи. Полученная система нелинейных алгебраических уравнений решается итерационным методом переменных направлений [5], при этом значение $\psi_{n,m}$ в правой части уравнения (11) берется с предыдущей итерации. Результаты численных расчетов при $\omega^1(y) \equiv 0$ согласуются с ранее проделанными расчетами, приведенными в работе [6, 7], при этом время расчетов значительно сокращается из-за меньшего количества арифметических операций.

Библиографический список

1. Yih C.S. Stratified flows. – New-York: Academic Prees, 1980.
2. Васильев О.Ф., Квон В.И., Лыткин Ю.М., Розовский И.Л. Страфицированные течения // Гидромеханика. Т. 8. Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ, 1975. – С. 74–131.
3. Белолипецкий В.М., Генова С.Н., Туговиков В.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование задач гидроледотермики водотоков. – Новосибирск, 1994.
4. Белолипецкий В.М., Костюк В.Ю., Шокин Ю.И. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. – Новосибирск: Наука, Сиб. Отд-ние, 1991.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М., 1989.
6. Кузиков С.С., Семенов С.П. Метод численного расчета задач протекания стратифицированной жидкости // Вычислительные технологии. – 1995. – Т.4, №12.
7. Ингберг М.С., Митра А.К. Расчет истечения стратифицированной жидкости через слив с целью определения условия селективного отбора // Теоретические основы инженерных расчетов, 1988, №3.

УДК 517.95, 532.51

Плоско-параллельное течение вязкоупругой жидкости Максвелла около критической точки

С.В. Мелешко[1], Н.П. Мошкин[2,3], В.В. Пухначев[2,3]

[1] Технический университет Суранари, г. Накхон-Ратчасима, Таиланд; [2]ИГ им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия;

[3]НГУ, г. Новосибирск, Россия

В докладе рассматривается плоское движение несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла в полуплоскости $y>0$, ограниченной твердой непроницаемой стенкой, на ней ставятся условия прилипания. Среда характеризуется постоянными временем релаксации τ, плотностью ρ и вязкостью μ. В качестве объективной производной в реологическом соотношении выбирается верхняя конвективная производная [1].

Система уравнений движения состоит из шести квазилинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, имеющей как вещественные, так и комплексные характеристики [2]. Неизвестными функциями являются горизонтальная u и вертикальная v компоненты скорости, давление p и элементы тензора вязкоупругих напряжений $S_{xx}=A,\ S_{xy}=S_{yx}=B,\ S_{yy}=C$.

$$\begin{aligned}
&u_x+v_y=0,\\
&\rho\left(u_t+uu_x+uu_y\right)=-p_x+A_x+B_y,\\
&\rho\left(v_t+uv_x+vv_y\right)=-p_y+B_x+C_y,\\
&A_t+uA_x+vA_y-2\left(Au_x+Bv_x\right)+\tau^{-1}A=2\mu\tau^{-1}u_x,\\
&B_t+uB_x+vB_y-Au_y-Cv_x+\tau^{-1}B=2\mu\tau^{-1}\left(u_y+v_x\right),\\
&C_t+uC_x+vC_y-2\left(Bu_y+Cv_y\right)+\tau^{-1}C=2\mu\tau^{-1}v_y.
\end{aligned}\tag{1}$$

На основе теоретико-группового анализа в работе [3] выписаны гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла (1). С их помощью изучена задача о слоистом течении между параллельными пластинами (аналог классического течения Куэтта в динамике вязкой несжимаемой жидкости).

Решения системы (1), построенные в [2, 3], являются эффективно одномерными. Оказывается, что множество ее точных решений можно расширить, отказавшись от требования независимости напряжений от x. Основным является случай, когда функция A не зависит от x, , функция B линейна по x, , а функции p и C квадратичны по x,

$$\begin{aligned}
&A=a(y,t),\ \ B=xb(y,t),\\
&C=x^2c(y,t)+d(y,t),
\end{aligned}\tag{2}$$