

Математическая модель внутренней эрозии

А.А. Папин, Н.Н. Сибин

АлтГУ, г. Барнаул

Рассматриваются процессы фильтрации подземных вод и внутренней суффозии. Грунт моделируется как трехфазная сплошная пористая среда. Поры полностью заполнены смесью воды ($i = 1$) и подвижных твердых частиц ($i = 2$). Доля пор в грунте ($i = 3$) определяется пористостью $\phi = (V_1 + V_2) / V$, где $V = V_1 + V_2 + V_3$ - общий объем грунта, V_1, V_2, V_3 - соответственно объемы воды, подвижных твердых частиц и скелета грунта.

Уравнения сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазового перехода имеют вид [1]

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{u}_1) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \vec{u}_2) = \dot{m}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_3 \vec{u}_3) = -\dot{m}, \quad (3)$$

где \dot{m} - интенсивность фазового перехода (суффозионный поток); $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ - соответственно истинные скорости воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта; $\rho_1 = \phi s_1 \rho_1^0$, $\rho_2 = \phi s_2 \rho_2^0$, $\rho_3 = (1 - \phi) \rho_3^0$ - приведенные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета; $s_1 = V_1 / (V_1 + V_2)$, $s_2 = V_2 / (V_1 + V_2)$ - концентрации воды (насыщенность) и подвижных твердых частиц в порах; $\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0$ - истинные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта; $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ - оператор градиента, $x = (x_1, x_2, x_3)$. В рассматриваемом

случае $\rho_3^0 = \rho_2^0$, так как подвижные частицы захватываются суффозионным потоком из грунта.

Уравнения сохранения импульса для воды и подвижных твердых частиц грунта берем в виде [1, 2, 3]

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0(\phi) \frac{\bar{k}_{oi}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Здесь $K_0(\phi)$ - симметрический тензор фильтрации пористой среды; \bar{k}_{oi} - относительные фазовые проницаемости ($k_{oi} = k_{oi}(s_i) \geq 0, k_{oi}|_{s_i=0} = 0, 0 \leq s_i \leq 1$); μ_i - коэффициенты динамической вязкости;

\vec{g} - ускорение силы тяжести; p_1, p_2 - соответственно давления первой и второй фаз.

Пусть $s = s_1$, тогда $1 - s = s_2$. Разность фазовых давлений удовлетворяет соотношению вида [1, 3]

$$p_2 - p_1 = p_c(s, x) \geq 0, \quad (5)$$

где p_c - заданная функция обладающая свойствами [4, 5]:

$$p_c(x, s) = p_0(x) j(s), \quad p_0(x) > 0, \\ j(s) \geq 0, \quad j(0) = \infty, \quad j(1) = 0, \quad \frac{\partial j}{\partial s} < 0.$$

В настоящей работе предлагается использовать следующее соотношение для определения суффозионного потока [6]

$$\dot{m} = \delta(s) R(\phi) \max\{|\vec{v}_1| - v_k, 0\}. \quad (6)$$

Здесь

$$\delta(s) = \begin{cases} 0, & s \geq 1; \\ 1-s, & 0 < s < 1; \\ 1, & s \leq 0. \end{cases} \quad R(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi \geq 1; \\ \phi(1-\phi), & 0 < \phi < 1; \\ 0, & \phi \leq 0. \end{cases}$$

В [7] дан обзор работ по моделированию суффозионных процессов. В [8] показано, что в случае одной пространственной переменной система (1)–(6) сводится к системе двух уравнений:

$$\frac{\partial s \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K_0(\phi) a(s) \nabla s - b(s) v(t) + F(s, \phi)), \quad (7)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -\dot{m}, \quad (8)$$

Здесь

$$a = -\frac{k_{01} k_{02}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s},$$

$$\vec{f}_0 = K_0 k_{01} \left(\int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \nabla_x \frac{\partial p_c(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi + \rho_1^0 \vec{g} \right),$$

$$\vec{F} = \vec{f}_0 - b \vec{f}, \quad b(s) = \frac{k_{01}}{k},$$

$$\vec{f} = K_0 (k_{02} \nabla_x p_c + k \int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \nabla_x \frac{\partial p_c(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi + (k_{01} \rho_1^0 + k_{02} \rho_2^0) \vec{g}). \text{ Для (7), (8) рассмотрена задача}$$

$$s(0, t) = s_0(t), \quad s(1, t) = s_1(t), \quad (9)$$

$$s(x, 0) = s^0(x), \quad \phi(x, 0) = \phi^0(x).$$

Особенностью данной задачи является необходимость обоснования физического принципа максимума для пористости ϕ и насыщенности s вида $0 \leq \phi \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$. Кроме того коэффициент $a(s)$ в общем случае обладает свойствами $a(0) = a(1) = 0$, $a(s) > 0$ при $s \in (0, 1)$, то есть уравнение (7) является вырождающимся на решении, а переменная неизвестная пористость существенно усложняет структуру системы (7), (8).

Определение 1. Классическим решением задачи (7)–(9) в цилиндре Q_T будем называть пару функций $s(x, t), \phi(x, t) \in C^{2+\alpha, (2+\alpha)^2}(Q_T)$, удовлетворяющую уравнениям (7), (8) и условиям (9) в обычном смысле. Причем $0 \leq s \leq 1$, $0 < \phi \leq 1$.

Теорема. Пусть данные задачи (7)–(9) подчиняются условиям:

1. Функции $K_0(\phi), a(s), b(s), F(s, \phi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $s \in [0, 1]$, $\phi \in [0, 1]$ и удовлетворяют условиям

$$0 < m \leq K_0(\phi), a(s) \leq M < \infty,$$

$$F(s, \phi) = 0 \text{ при } s < 0, s > 1.$$

2. Функции $v(t), s_0(t), s_1(t), s^0(x), \phi^0(x)$ удовлетворяют следующим условиям гладкости

$$v(t), s_0(t), s_1(t) \in C^{2+\alpha}[0, T]; s^0(x), \phi^0(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{Q})$$

и условиям согласования

$$s_0(0) = s^0(0), s_1(0) = s^0,$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$|v(0)| > v_k, 0 \leq s^0(x) \leq 1, 0 < m_0 \leq \phi^0 \leq 1,$$

$$0 \leq s_0(t) \leq 1, 0 \leq s_1(t) \leq 1$$

где m_0, m, M, v_k – известные положительные постоянные.

Тогда для любого конечного интервала $(0, T]$ задача (7)–(9) имеет единственное классическое решение:

$$\phi(x, t), s(x, t) \in C^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(Q_T).$$

Более того

$$0 \leq s(x, t) \leq 1, 0 < \phi(x, t) \leq 1, (x, t) \in Q_T.$$

Близкие задачи рассматриваются в работах [9–12].

Автомодельное решение

Рассмотрим одномерное движение при условиях $\vec{g} = 0, \vec{u}_3 = 0$.

Решение системы (1)–(4) ищется в области $(-\infty, ct)$ в предположении, что все искомые функции зависят лишь от переменной $\xi = x - ct$ (c – неизвестная постоянная). Вместо (1)–(4) получим

$$-c \frac{d(s\phi)}{d\xi} + \frac{dv_1}{d\xi} = 0, \quad (10)$$

$$-c \frac{d(1-s)\phi}{d\xi} + \frac{dv_2}{d\xi} = \frac{\dot{m}}{\rho_2^0}, \quad (11)$$

$$-c \frac{d(1-\phi)}{d\xi} = -\frac{\dot{m}}{\rho_2^0}. \quad (12)$$

Краевые условия:

$$v_1|_{\xi=0} = v_1^+, \quad v_2|_{\xi=0} = v_2^+, \quad s|_{\xi=0} = s^+, \quad \phi|_{\xi=0} = \phi^+, \\ v_1|_{\xi \rightarrow -\infty} = v_1^-, \quad v_2|_{\xi \rightarrow -\infty} = v_2^-, \quad s|_{\xi \rightarrow -\infty} = s^-, \quad \phi|_{\xi \rightarrow -\infty} = \phi^-.$$

Следуя [11, 12] приводим к системе уравнений для s, ϕ

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{k_{01}c}{a(s)kK_0} - \frac{cs\phi}{a(s)K_0}, \quad (13)$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{\lambda}{c}(1-s)\phi(1-\phi)(|c|s\phi - v_k). \quad (14)$$

Здесь

$$v_1^- = \frac{v_1^+ s^- \phi^-}{s^+ \phi^+}, \quad v_2^- = \frac{v_1^+ - v_1^-}{s^+ \phi^+}, \quad v_2^+ = \frac{v_1^+}{s^+ \phi^+} - v_1^+, \quad c = \frac{v_1^+}{s^+ \phi^+}.$$

Для получения численного решения системы (13), (14) с заданными краевыми условиями используется метод Рунге-Кутты 4 порядка точности. Численный алгоритм решения системы реализован на языке C++ с использованием библиотеки QT.

Симметрический тензор фильтрации пористой среды $K_0 = \phi^2$. Капиллярное давление $p_c = 1/(s^2 - 1)$.

Относительная фазовая проницаемость воды и подвижных твердых частиц

$$k_{01} = \begin{cases} 0, & s < 0; \\ s^{n_1}, & 0 < s < 1; \\ 1, & s > 1. \end{cases} \quad k_{02} = \begin{cases} 1, & s < 0; \\ (1-s)^{n_2}, & 0 < s < 1; \\ 0, & s > 1. \end{cases}$$

На рисунке 1 и рисунке 2 рассмотрен случай, когда $n_i = 2$,

$$s^- = 0.503, \quad s^+ = 0.99, \quad \phi^- = 0.9, \quad \phi^+ = 0.25, \quad v_1^+ = -0.007 \text{ м/с.}$$

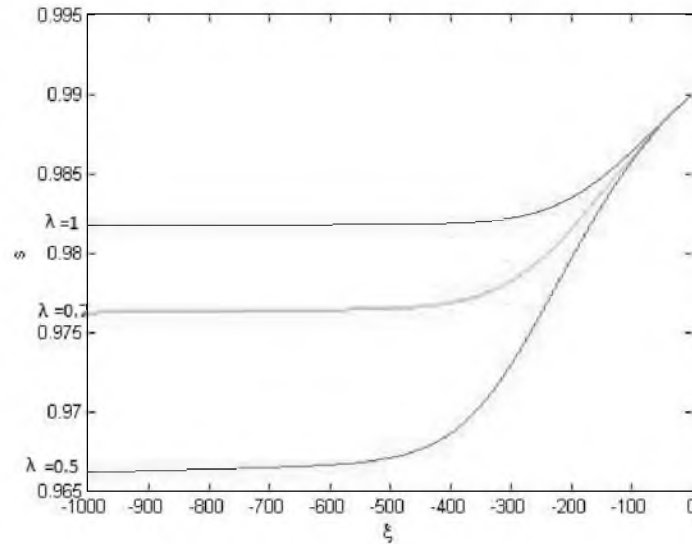


Рисунок 1 – Изменение концентрации воды

На рисунках 1, 2 видно выполнение физического принципа максимума для концентрации воды S и пористости грунта ϕ . Заметим, что при увеличении λ концентрация воды и пористость грунта увеличиваются.

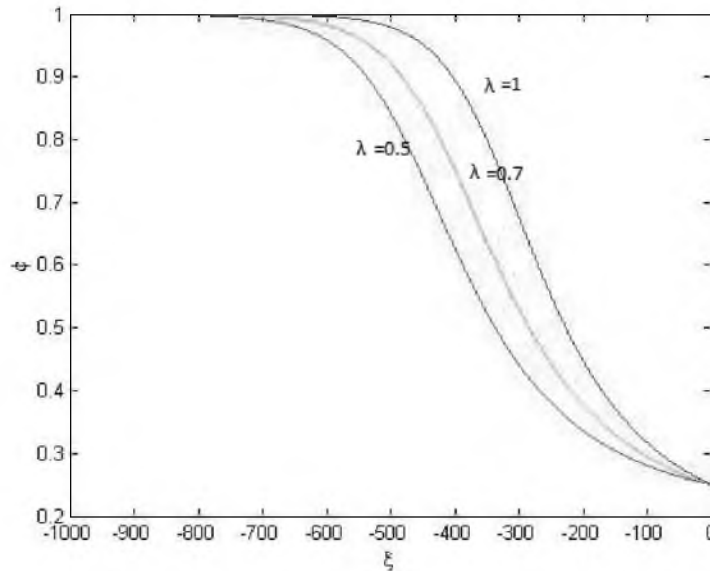


Рисунок 2 – Изменение пористости грунта

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291и государственного задания Министерства №01201460959.

Библиографический список

1. Папин А.А., Вайгант В.А., Сибин А.Н. Математическая модель изотермической внутренней эрозии // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2015.
2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.
3. Gard S.K., Pritchett J.W. Dynamics of gas - fluidized beds. Journal of Applied Physics // Journal of Applied Physics, Vol. 46, № 10, 1975.
4. Wang J., Walters D.A., Settari A., Wan R.G. Simulation of cold heavy oil production using an integrated modular approach with emphasis on foamy oil flow and sand production effects // 1st Heavy Oil Conference 2006.
5. Vardoulakis I., Sulem J. Bifurcation Analysis in Geomechanics. – London, 2005. – P. 138–176.
6. Vardoulakis I. Sand – production and sand internal erosion: Continuum modeling // Alert School: Geomechanical and Structural Issues in Energy Production. – 2006.
7. Папин А.А. Проблемы математического моделирования внутренней суффозии грунта: препринт №1/15/ А.А. Папин, А.Н. Сибин. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015.
8. Папин А.А., Сибин А.Н. О разрешимости первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2015.

9. Сибин А.Н. Математическая модель деформации мерзлого грунта вблизи термокарстовых озер // Анализ, геометрия и топология: сб. тр. Всерос. молодеж. школы-семинара. – Барнаул, 2013. – С. 132–142.

10. Папин А.А., Гагарин Л.А., Шепелев В.В., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолетнемерзлыми породами // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2013. – Вып. 1/2 (77). – С. 38–41.

11. Сибин А.Н. Численное решение двумерной задачи фильтрации с учетом суффозионных процессов // Ломоносовские чтения на Алтае : сборник научных статей международной школы-семинара. – Барнаул АлтГПА, 2014. – Ч. II. – С. 389–393.

12. Bonelli S., Marot D. On the modelling of internal soil erosion // The 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG). – 2008.

УДК 532.546 + 544.344.015.4

Математические модели динамики снежного покрова¹

Папин А.А., Юст Е.С.

АлтГУ, г. Барнаул

Снег рассматривается как пористая среда, твердый каркас которой составляют подвижные частицы льда. В процессе таяния в пористой среде происходит совместное движение воды, воздуха и пара. Тающий снег является четырехфазной средой, состоящей из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$), льда ($i = 3$) и пара ($i = 4$). Учет сублимации связан с тем обстоятельством, что значительные объемы снега испаряются и при отрицательных температурах, минуя жидкую фазу.

Уравнения неразрывности с учетом пористости принимают вид [1]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \bar{u}_i) = \sum_{j=1}^4 I_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^4 I_{ji} = 0. \quad (1)$$

Здесь ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ ($\alpha_i = \phi_i s_i, i = 1, 2, 4, \alpha_3 = 1 - \phi$); ϕ – пористость; t – время; \bar{u}_i, s_i – скорости и насыщенности фаз (доля поры, занятой i -й фазой); I_{ij} – интенсивность перехода массы из i -ой в j -ю составляющую в единице объема в единицу времени; $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), (x_1 x_2 x_3)$ – переменные Эйлера.

По определению, насыщенности меняются в пределах $0 \leq s_i \leq 1$, и, более того,

$$s_1 + s_2 + s_4 = 1. \quad (2)$$

Вместо уравнений сохранения импульса в теории фильтрации используется обобщенный закон Дарси [2]:

$$s_i \phi (\bar{u}_i - \bar{u}_3) = -K_0 \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x} + \rho_i^0 \bar{g} \right), \quad i = 1, 2, 4, \quad (3)$$

где \bar{u}_3 – скорость твердого скелета (льда), K_0 – тензор фильтрации (функция пористости), \bar{k}_{0i} – относительные фазовые проницаемости, μ_i – коэффициенты динамической вязкости, p_i – давления фаз, \bar{g} – вектор ускорения силы тяжести.

В соответствии с законом Лапласа давления в фазах i и j различаются на величину капиллярного скачка ($i < j$) [3]

$$p_i - p_j = p_{cij} = \sigma_{ij} J(s_i, s_j) \sqrt{\frac{\phi}{|K_0|}} \cos \gamma_{ij}, \quad (4)$$

где σ_{ij} – коэффициент поверхностного натяжения, γ_{ij} – угол смачивания, $J(s_i, s_j)$ – функция Леверетта.

Уравнение сохранения энергии для тающего снега с учетом сублимации берется в виде [4]

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291 и государственного задания Министерства №01201460959