9. Сибин А.Н. Математическая модель деформации мерзлого грунта вблизи термокарстовых озер // Анализ, геометрия и топология: сб. тр. Всерос. молодеж. школы-семинара. – Барнаул, 2013. – С. 132–142.

10. Папин А.А., Гагарин Л.А., Шепелев В.В., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолетнемерзлыми породами // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2013. – Вып. 1/2 (77). – С. 38–41.

11. Сибин А.Н. Численное решение двумерной задачи фильтрации с учетомсуффозионных процессов // Ломоносовские чтения на Алтае : сборник научных статей международной школы-семинара. – Барнаул АлтГПА, 2014. – Ч. II. – С. 389–393.

12. Bonelli S., Marot D. On the modelling of internal soil erosion // The12th International Conference of International Association for ComputerMethods and Advances in Geomechanics (IACMAG). – 2008.

УДК 532.546 + 544.344.015.4

Математические модели динамики снежного покрова[1]

Папин А.А., Юст Е.С.
АлтГУ, г. Барнаул

Снег рассматривается как пористая среда, твердый каркас которой составляют подвижные частицы льда. В процессе таяния в пористой среде происходит совместное движение воды, воздуха и пара. Тающий снег является четырехфазной средой, состоящей из воды ($i=1$), воздуха ($i=2$), льда ($i=3$) и пара ($i=4$). Учет сублимации связан с тем обстоятельством, что значительные объёмы снега испаряются и при отрицательных температурах, минуя жидкую фазу.

Уравнения неразрывности с учетом пористости принимают вид [1]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_i \vec{u}_i)=\sum_{j=1}^{4} I_{ji},\quad i=1,2,3,4\quad I_{ji}=-I_{ij},\quad \sum_{i,j=1}^{4} I_{ji}=0. \quad (1)$$

Здесь ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i=\alpha_i\rho_i^0$ ($\alpha_i=\phi_i s_i$, $i=1,2,4$, $\alpha_3=1-\phi$); ϕ – пористость; t – время; $\vec{u}_i, s_i$ – скорости и насыщенности фаз (доля поры, занятой i-й фазой); I_{ij} – интенсивность перехода массы из i-ой в j-ю составляющую в единице объема в единицу времени; $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$, $(x_1 x_2 x_3)$ – переменные Эйлера.

По определению, насыщенности меняются в пределах $0\le s_i\le 1$, и, более того,

$$s_1+s_2+s_4=1. \quad (2)$$

Вместо уравнений сохранения импульса в теории фильтрации используется обобщенный закон Дарси [2]:

$$s_i\phi(\vec{u}_i-\vec{u}_3)=-K_0\frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}\left(\frac{\partial p_i}{\partial x}+\rho_i^0\vec{g}\right),\quad i=1,2,4, \quad (3)$$

где $\vec{u_3}$ – скорость твердого скелета (льда), K_0 – тензор фильтрации (функция пористости), $\overline{k_{0i}}$ – относительные фазовые проницаемости, μ_i – коэффициенты динамической вязкости, p_i – давления фаз, $\vec{g}$ –вектор ускорения силы тяжести.

В соответствии с законом Лапласа давления в фазах i и j различаются на величину каппилярного скачка ($i<j$) [3]

$$p_i-p_j=p_{cij}=\sigma_{ij}J(s_i,s_j)\sqrt{\frac{\phi}{|K_0|}}\cos\gamma_{ij}, \quad (4)$$

где σ_{ij} – коэффициент поверхностного натяжения, γ_{ij} – угол смачива-ния, $J(s_i,s_j)$ – функция Леверетта.

Уравнение сохранения энергии для тающего снега с учетом сублимации берется в виде [4]

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291 и государственного задания Министерства №01201460959

$$(\sum_{i=0}^{4}\rho_i^0 c_i\alpha_i)\frac{\partial\theta}{\partial t}+(\sum_{i=0}^{4}\rho_i^0 c_i\alpha_i\vec{u_i})\nabla\theta=div(\lambda_c\nabla\theta)+\nu\frac{\partial\rho_3}{\partial t}-\mu\frac{\partial\rho_4}{\partial t}, \tag{5}$$

где θ – температура среды ($\theta=\theta_i, i=1,2,3,4$); $c_i=const>0$ – тепло-емкость i -й фазы при постоянном давлении; $\nu=const>0$ – удельная теплота плавления льда; $\mu=const>0$ – удельная теплота испарения воды; λ_c – коэффициент теплопроводности снега.

Следуя [5, 6, 7], дополним систему (1)–(5) реологическим уравнением для пористости и условием равновесия «системы в целом»:

$$\nabla\cdot\vec{u}_3=-\frac{1}{\xi(\phi)}p_e-\beta_t(\phi)\left(\frac{\partial p_e}{\partial t}+\vec{u}_3\cdot\nabla p_e\right), \tag{6}$$

$$\nabla p_{tot}=\rho_{tot}\vec{g}, \tag{7}$$

где $p_e=p_{tot}-p_f$ – эффективное давление, $p_{tot}=\phi p_f+(1-\phi)p_s$ – общее давление, $p_f=s_1p_1+s_2p_2$, p_s – соответственно давления жидкой и твердой фаз, $\rho_{tot}=(1-\phi)\rho_3^0+\phi(s_1\rho_1^0+s_2\rho_2^0)$ – общая плотность; $\xi(\phi)$ и $\beta_t(\phi)$ – коэффициенты объемной вязкости и объемной сжимаемости пористой среды есть заданные функции (модельные зависимости: $\frac{1}{\xi(\phi)}=\phi^m/\nu$, $\beta_t(\phi)=\phi^b\beta_\phi$, где $b=1/2, n=3, m\in[0,2]$, μ,ν,β_ϕ, – положительные параметры пороупругой среды [6, 7]).

Обзор моделей снежно–ледового покрова можно найти в [8, 9, 10]. В [11] доказана разрешимость автомодельной задачи в случае неподвижного пористого скелета. В работе [12] учтена сублимация. Близкие по структуре модели рассматривались в [13, 14, 15].

Модель тающего льда. Лед рассматривается как деформируемая пористая среда, в порах которой движется сжимаемая жидкость.

Для описания процесса используются уравнения сохранения масс для воды и льда с учетом фазовых переходов, закон Дарси, реологическое соотношение для случая механического сжатия и соотношение для динамического эффективного давления в случае полного насыщения среды:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_i}{\partial t}+div((1-\phi)\rho_i\vec{v_i})=I_{wi}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial\rho_w\phi}{\partial t}+div(\rho_w\phi\vec{v_w})=I_{iw}, \tag{9}$$

$$\varphi(\vec{v_w}-\vec{v_i})=-\frac{k(\phi)}{\mu}\left(\nabla p_w+\rho_w\vec{g}\right), \tag{10}$$

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt}=-\phi\beta\frac{dp_e}{dt},\quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v_i}\cdot\nabla), \tag{11}$$

$$p_e=p_{tot}-p_w, \tag{12}$$

Здесь $\rho_i,\rho_w,\vec{v_i},\vec{v_w}$ – соответственно истинные плотности и скорости фильтрации льда и воды, I_{iw} – интенсивность перехода массы изо льда в воду в единице объема в единицу времени, ϕ – пористость, k – проницаемость, μ – динамическая вязкость, β – заданный параметр среды, p_i,p_w – давление льда и воды, p_e – эффективное давление, $p_{tot}=\phi p_w+(1-\phi)p_i$ – общее давление, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести.

Система (8)–(12) в автомодельной переменной ($\xi=x_3-ct$) в предположении, что лед неподвижен, вектор ускорения силы тяжести равен нулю ($\vec{v_i}=0, \vec{g}=0$) и $(\rho_i,\rho_w,p_{tot})=const$, сводится к следующей системе уравнений относительно искомых функций ϕ, p_w,v_w:

$$\frac{d}{d\xi}(c(\rho_w\phi+(1-\phi)\rho_i)-\phi\rho_w v_w)=0, \tag{13}$$

$$v_w=-\frac{k(\phi)}{\phi\mu}\frac{dp_w}{d\xi}, \tag{14}$$

$$|c|\frac{d}{d\xi}\left(\ln\frac{\phi}{1-\phi}\right)=-\beta\frac{d(p_{tot}-p_w)}{d\xi}. \tag{15}$$

Уравнения дополняются следующими условиями:

$$\phi(0)=\phi^0\in(0,1),\quad \phi\big|_{\xi=-\infty}=0,\quad \frac{d\phi}{d\xi}\bigg|_{\xi=-\infty}=0. \tag{16}$$

Интегрируя (15), получим

$$p_w = \frac{|c|}{\beta}\ln\frac{\phi}{1-\phi} + A_1. \tag{17}$$

Из (17) и (14) получаем

$$v_w = -\frac{k(\phi)|c|}{\phi^2(1-\phi)\mu\beta}\frac{d\phi}{d\xi}. \tag{18}$$

Подставим (18) в (13) и проинтегрируем полученное выражение

$$c(\rho_w\phi + (1-\varphi)\rho_i) + \frac{\rho_w k(\phi)|c|}{\phi(1-\phi)\mu\beta}\frac{d\phi}{d\xi} = A_2. \tag{19}$$

Используя условия (16), из равенства (19) получаем уравнение для пористости:

$$a(\phi)\frac{d\phi}{d\xi} = |c|\phi(\rho_w - \rho_i), \tag{20}$$

где $a(\phi) = \dfrac{\rho_w k(\phi)|c|}{\phi\mu\beta(1-\phi)} > 0$ при $\phi \in (0,1)$ и $a(\phi) = 0$ при $\phi \le 0$ и $\phi \ge 1$.

Определение 1. Слабым решением задачи (13)–(16) в области $R^- = (-\infty;0)$ называются функции $\phi(\xi),\ p_w(\xi), v_w(\xi)$, если:

1) $\phi(\xi)$ имеет непрерывную производную, удовлетворяет уравнению (20) и условиям (16);
2) $p_w(\xi)$ удовлетворяет равенству (17);
3) $v_w(\xi)$ удовлетворяет уравнению (18).

Теорема 1. При выполнении условия $\phi^0 \in [0,1]$ существует по крайней мере одно слабое решение задачи (13)–(16). Это решение обладает свойством $0 \le \phi(\xi) \le 1$. Кроме того, существует точка $\xi^* \in (-\infty;\xi_1]$ такая, что $\phi(\xi) = 0$ для всех $\xi \le \xi^*$.

Для доказательства теоремы достаточно установить разрешимость задачи

$$a(\phi)\frac{d\phi}{d\xi} = |c|\phi(\rho_w - \rho_i), \quad \xi < 0, \quad \phi(0) = \phi^0 \tag{21}$$

и показать, что $\phi(\xi) \equiv 0$ при $\xi \le \xi^*$.

Пусть $\varepsilon \in (0,1), a_\varepsilon(\phi) \equiv a(\phi) + \varepsilon > 0.$ Рассмотрим задачу

$$a_\varepsilon(\phi^\varepsilon)\frac{d\phi^\varepsilon}{d\xi} = |c|\phi^\varepsilon(\rho_w - \rho_i), \quad \xi < 0, \quad \phi^\varepsilon(0) = \phi^0. \tag{22}$$

Лемма 1. Если $\phi^\varepsilon(\xi)$ – решение задачи (22) и $\phi^0 \in [0,1]$, то $0 \le \phi^\varepsilon(\xi) \le 1.$

Положим $v^\varepsilon \equiv \int_0^{\phi^\varepsilon} a_\varepsilon(x)dx.$ Тогда $\dfrac{dv^\varepsilon}{d\phi^\varepsilon} = a(\phi^\varepsilon) + \varepsilon > 0$ и $\phi^\varepsilon = \phi(v^\varepsilon).$

Рассмотрим задачу

$$\frac{dv^\varepsilon}{d\xi} = |c|\varphi^\varepsilon(\rho_w - \rho_i), \quad \xi < 0, \quad v^\varepsilon(0) = \int_0^{\varphi^0} a_\varepsilon(x)dx \equiv v^0. \tag{23}$$

Согласно теореме Арцела, из последовательностей $\{v^\varepsilon(\xi)\}$, $\{\phi^\varepsilon(\xi)\}$ можно выбрать равномерно сходящиеся к $v(\xi), \phi(\xi)$ подпоследова-тельности. В силу непрерывности правой части уравнения в (23), в равенстве

$$v^0 - v^\varepsilon(\xi) = \int_\xi^0 |c|\varphi^\varepsilon(x)(\rho_w - \rho_i)dx$$

можно перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$. В результате получим, что предельные функции удовлетворяют соответствующим интегральным уравнениям, т.е. являются решением задачи (21).

Функция $\phi(\xi)$ непрерывна на отрезке $[\xi_1,0]$ и, следовательно, существует значение $\phi^1 \equiv \phi(\xi_1) \in [0,1]$. Поэтому можно рассмотреть задачу

$$a(\phi)\frac{d\phi}{d\xi} = |c|\phi(\rho_w - \rho_i), \quad \xi < \xi_1, \quad \phi(\xi_1) = \phi^1. \tag{24}$$

Лемма 2. Пусть $\phi(\xi)$ – решение задачи (24), $\phi \in [0,1]$, $k(\phi) = \phi^{n_1}(1-\phi)^{n_2}$. Тогда существует такая точка $\xi^* \le \xi_1$, что $\phi(\xi) \equiv 0$ для всех $\xi \le \xi^*$. Если $\phi^1 = 0$, то $\xi^* = \xi_1$.

Доказательство. Из (24) имеем:

$$\frac{du}{d\xi} = |c|(\rho_w - \rho_i) = A_3, \quad u(\phi) = \int_0^{\phi} \frac{a(x)}{x} dx. \tag{25}$$

Интегрируя уравнение (25) по ξ от произвольного значения ξ до ξ_1, получаем

$$u(\phi(\xi_1)) - u(\phi(\xi)) = A_3(\xi_1 - \xi).$$

Поэтому $u(\phi(\xi)) \le 0$ для всех $\xi \le \xi^*$, где ξ^* удовлетворяет условию

$$A_3\xi^* = A_3\xi_1 - \int_0^1 \frac{a(x)}{x} dx.$$

Тогда из определения $u(\phi)$ следует, что $u(\phi(\xi)) \equiv 0$ при $\xi \le \xi^*$.

Случай $\phi(\xi_1) = 0$ рассматривается также как в [11]. Лемма 2 доказана.

С учетом леммы 2 задача (24) рассматривается аналогично задаче (21).

Таким образом, существует функция $\phi(\xi)$, удовлетворяющая определению слабого решения задачи (13)–(16). Теорема доказана.

Библиографический список

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред / Часть 1. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 464 с.

2. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М., 1971. – 453 с.

3. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа // М.: Недра, 1972. – С. 288.

4. Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока. Физико-математические модели. – М.: Наука, 1983. – 214 с.

5. Connolly J. A. D., Podladchikov Y. Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. 1998. Vol. 11.

6. Connolly J. A. D., Podladchikov Y. Y. Temperature-dependen viscoelastic compaction and compartmentalization in sedimentary basins // Tectonophysics. 2000. Vol. 324.

7. Tantserev E., Cristophe Y. Galerne, Podladchikov Y. Multiphase flow in multi-component porous visco-elastic media // The Fourth Biot Conference on Poromechanics 2009. – C. 1151.

8. Папин А.А., Гоман В.А. Проблемы математического моделирования снежно-ледового покрова. Препринт № 1/14. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2014. – 40 с.

9. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации: монография. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2009. – 220 с.

10. Коробкин А.А., Папин А.А., Хабахпашева Т.И. Математические модели снежно-ледового покрова: монография. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013. – С. 116.

11. Папин А.А. Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т.49. №4.

12. Юст Е.С. Модельная задача тепломассопереноса в тающем снеге с учетом сублимации // Ломоносовские чтения на Алтае- 2015 : материалы Межд. школы-семинара. Барнаул, 20-25 октября, 2015. – Барнаул, 2015. – С. 780–789.

13. Шишмарев К.А. Математические вопросы моделирования взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2015. – Вып. 1/1 (85). – С. 126–132.

14. Шишмарев К.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // Труды молодых ученых АлтГУ. – 2011. – №8. – С. 126–128.

15. Папин А.А. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений движения двухфазной смеси: учебное пособие. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2007. – 126 с.