УДК 551.345+539.3

О характеристиках системы уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды Маквелла

А.Г. Петрова, А.В. Пестова
АГУ, г. Барнаул

Модели поведения вязкоупругой среды Максвелла являются предметом мночисленных математических исследований (см., например, монографии [1–3], статьи [4, 5] и цитированную в них литературу). При естественных ограничениях термодинамического характера уравнения движения сжимаемой вязкоупругой среды имеют гиперболический тип [3]. Важное свойство гиперболичности теряется, если среда несжимаема. Материальными характеристиками вязкоупругой среды являются ее плотность ρ, динамическая вязкость μ и время релаксации τ. Эти величины далее предполагаются постоянными. Кроме того, считается, что на среду не действуют внешние объемные силы. В сделанных предположениях уравнения движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла имеют вид:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\\ \rho(\mathbf{v}_t+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})=-\nabla p+\operatorname{div}\mathbf{S},\\ \tau\left(\mathbf{S}_t+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{S}-\mathbf{W}\cdot\mathrm{S}+\mathrm{S}\cdot\mathbf{W}+\mathrm{S}\right)=2\mu\mathbf{D}.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь **D** – тензор скоростей деформаций векторного поля **v**, в послед-нем уравнении в качестве инвариантной производной вращательную использована производная Яуманна, где W – антисимметричная часть тензора **∇v.**

Эта система имеет составной тип. Данное обстоятельство является причиной того, что общая теория начально-краевых задач для указанной системы не построена даже в двумерном случае.

Характеристики системы (1) в двумерном случае, когда $\boldsymbol{S}_{xx}+\boldsymbol{S}_{yy}=0$ приведены в [4, 5].

Настоящая работа посвящена нахождению характеристик системы (1) в трехмерном случае.

Обозначим через u, v, w проекции вектора скорости на оси декарто-вой системы координат x,y,z на плоскости и введем следующие обоз-начения для элементов симметричного тензора **S**:

$$\boldsymbol{S}_{xx}=a,\ \boldsymbol{S}_{xy}=\boldsymbol{S}_{yx}=b,\ \boldsymbol{S}_{xz}=\boldsymbol{S}_{zx}=c,\ \boldsymbol{S}_{yy}=d,\ \boldsymbol{S}_{yz}=\boldsymbol{S}_{zy}=g,\ \boldsymbol{S}_{zz}=h.$$

Функции *u, v, w, p, a, b, c, d, g, h* удовлетворяют следующей систе-ме десяти уравнений:

$$\begin{gathered}u_x+v_y+w_z=0;\\ \rho(u_t+uu_x+vu_y+wu_z)+p_x-a_x-b_y-c_z=0,\\ \rho(v_t+uv_x+vv_y+wv_z)+p_y-b_x-d_y-g_z=0,\\ \rho(w_t+uw_x+vw_y+ww_z)+p_z-c_x-g_y-h_z=0;\\ \tau(a_t+ua_x+va_y+wa_z)-2\mu u_x+b(v_x-u_y)+c(w_x-u_z)+a=0,\\ \tau(b_t+ub_x+vb_y+wb_z)-\mu(u_y+v_x)+\\ +\frac{a-d}{2}(u_y-v_x)+\frac{g}{2}(w_x-u_z)+\frac{c}{2}(w_y-v_z)+b=0,\\ \tau(c_t+uc_x+vc_y+wc_z)-\mu(v_z+w_x)+\\ +\frac{a-h}{2}(u_z-w_x)+\frac{g}{2}(v_x-u_y)+\frac{b}{2}(v_z-w_y)+c=0,\\ \tau(d_t+ud_x+vd_y+wd_z)-2\mu v_y+b(u_y-v_x)+g(w_y-v_z)+d=0,\\ \tau(g_t+ug_x+vg_y+wg_z)-\mu(v_z+w_y)+\\ +\frac{d-h}{2}(v_z-w_y)+\frac{c}{2}(u_y-v_x)+\frac{b}{2}(u_z-w_x)+g=0,\\ \tau(h_t+uh_x+vh_y+wh_z)-2\mu w_z+c(u_z-w_x)+g(v_z-w_y)+h=0.\end{gathered}\tag{2}$$

Запишем систему в виде (2)

$$A\frac{\partial U}{\partial t}+B\frac{\partial U}{\partial x}+C\frac{\partial U}{\partial y}+D\frac{\partial U}{\partial Z}=H,$$

где $U=(u,v,w,p,a,b,c,d,g,h)$ – вектор, A,B,C,D – матрицы коэффициентов размерности 10 на 10.

Пусть равенство $\varphi(t,x,y,z)=0$ задает характеристическую поверхность системы. Тогда φ удовлетворяет уравнению

$$\det\left|A\varphi_t+B\varphi_x+C\varphi_y+D\varphi_z\right|=0\,.\tag{3}$$

Рассмотрим сначала систему, полученную линеаризацией (2):

$$u_x+v_y+w_z=0;$$

$$
\begin{aligned}
&\rho u_t + p_x - a_x - b_y - c_z = 0,\\
&\rho v_t + p_y - b_x - d_y - g_z = 0,\\
&\rho w_t + p_z - c_x - g_y - h_z = 0;\\
&\tau a_t - 2\mu u_x + a = 0,\\
&\tau b_t - \mu(u_y + v_x) + b = 0,\\
&\tau c_t - \mu(u_z + w_x) + c = 0,\\
&\tau d_t - 2\mu v_y + d = 0,\\
&\tau g_t - \mu(v_z + w_y) + g = 0,\\
&\tau h_t - 2\mu w_z + h = 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Уравнение характеристик (3) для системы (4) без труда выписывается при помощи математических пакетов. Оно имеет вид:

$$\tau^3(\varphi_t)^4\left((\varphi_x)^2+(\varphi_y)^2+(\varphi_z)^2\right)\times\left[\mu\left((\varphi_x)^2+(\varphi_y)^2+(\varphi_z)^2\right)-\rho\tau(\varphi_t)^2\right]^2=0.$$

Тем самым линейная система (4) имеет две комплексные характеристики

$$(\varphi_x)^2+(\varphi_y)^2+(\varphi_z)^2=0, \tag{5}$$

четырехкратную траекторную характеристику

$$\varphi_t = 0$$

и две двукратные вещественные характеристики

$$\varphi_t = \pm\sqrt{\frac{\mu}{\rho\tau}\left((\varphi_x)^2+(\varphi_y)^2+(\varphi_z)^2\right)}.$$

Характеристики нелинейной системы (2) также искались с использованием пакетов MATHCAD и MAPLE. Несмотря на высокий порядок определителя и существенную заполненность матрицы удалось выделить пару две комплексных характеристики (5), четырехкратную траекторную характеристику

$$\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y + w\varphi_z = 0,$$

а также четыре характеристики, удовлетворяющие уравнению

$$(\rho\tau)^2\left(\varphi_t+u\varphi_x+v\varphi_y+w\varphi_z\right)^4-2\mu\rho\tau\left(\varphi_t+u\varphi_x+v\varphi_y+w\varphi_z\right)^2\times$$
$$\times\left(\mu\left((\varphi_x)^2+(\varphi_y)^2+(\varphi_z)^2\right)+F\right)+\mu^2\left((\varphi_x)^2+(\varphi_y)^2+(\varphi_z)^2\right)^2+G=0,$$

где функции $F(a,b,c,d,g,h,\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)$ и $G(a,b,c,d,g,h,\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)$ не имеют определенного знака и обращаются в ноль при отбрасовании нелинейных членов.

Специфика системы (1) состоит в том, что она не является эволюционной по отношению к давлению. Поэтому для нее нельзя ставить задачу Коши с начальными данными при t = 0. Вопрос о разрешимости начально-краевых задач для этой системы в общем случае остается открытым даже в двумерном случае.

Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ 16-01-00127.

Библиографический список

1. Астарита Дж., Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978.
2. Joseph D.D. Fluid dynamics of viscoelastic fluids. New York: Springer, 1990.
3. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. – Новосибирск: Науч. кн., 1998.
4. Пухначев В.В. Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Прикл. мех. и техн. физ. 2010. Т. 51, № 4. С. 116–126.
5. Liapidevskii V.Yu., Pukhnachev V.V., Tani A. Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium // Wave Motion. – 2011. – V. 48, № 8. – P. 727–737.