

5. Мерзликина Д.А., Филип П., Пивоконский Р., Пышнограй Г.В. Многомодовая реологическая модель и следствия для простого сдвига и растяжения // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2013. – Т. 19, №2. – С. 254–261.

УДК 534.1 + 532.5

Математическое моделирование гидроупругой реакции ледовой пластины¹

К.А. Шишмарев
АлтГУ, г. Барнаул

В работе исследуются вязкоупругие колебания ледовой пластины, закрепленной между двух стенок, вызванные внешней нагрузкой. Внешняя нагрузка моделируется как локализованное пятно давления, движущееся с постоянной скоростью вдоль центральной линии канала, или как гидродинамический диполь, расположенный в жидкости и описывающий внешнее воздействие удаленных источников на жидкость. Изучаются удлинения в ледовом покрове вызванные изгибными напряжениями. Прогибы льда и удлинения в ледовом покрове исследуются в зависимости от ширины канала, толщины ледового покрова и скорости источника внешнего воздействия. В частности, исследуется влияние стенок канала на получаемые прогибы и удлинения.

Теория линейных гидроупругих волн является основным подходом в моделировании колебаний ледового покрова [1, 2]. Известно, что для неограниченной ледовой пластины существует критическая скорость волны, вызванной внешними нагрузками, ниже которой в линейной теории не существует решения для установившихся волн. Для описания результатов исследований колебаний ледового покрова в канале под действием внешних нагрузок необходимо определить критические скорости волн, распространяющихся вдоль канала. Эта задача была исследована в [3, 4]. В линейной постановке исследовались бегущие периодические гидроупругие волны. Решение получено с помощью разложения профиля волны поперек канала на суперпозицию функций форм свободных колебаний. Показано, что в канале существует счетное множество соотношений между волновым числом и частотой, которые соответствуют формам распространяющихся волн. Были определены соответствующие фазовые, групповые скорости и профили волн поперек канала. Задача была исследована для модели взаимодействия жидкости и ледового покрова в рамках линейной теории, учитывающей гидростатическую и гидродинамическую компоненты давления жидкости. Близкие по структуре задачи изучались в [5–7].

В работе для описания вязкоупругих эффектов льда используется модель Кельвина-Фойгта. Данная модель является значительно упрощенной моделью вязкоупругого материала. Основное уравнение в данной модели имеет вид $\sigma = E(\varepsilon + \tau \partial \varepsilon / \partial t)$, где E – модуль Юнга, σ – напряжение в материале, ε – удлинение в материале и τ – время релаксации. Модель Кельвина-Фойгта использовалась в работах [8, 9] и [10, глава 5] для описания колебаний ледового покрова в задачах с движущейся нагрузкой. В численном анализе Жесткой В.Д. и Козина В.Н. диссипативные эффекты, которые характеризуют время релаксации в вязкоупругой модели ледовой пластины, считались очень сильными. Время релаксации варьировалось от 3 до 10 секунд в [9] с целью получить вычисленные значения прогибов льда в численном анализе сопоставимые со значениями экспериментальных данных. Экспериментальные и численные результаты в [9] показывают, что магнитуда напряжений зависит от значений коэффициента времени релаксации. Соотношение для напряжений и удлинений в модели Кельвина-Фойгта является сильно упрощенным (см., например, [1] для комплексных моделей вязкоупругого льда). Исследование в данной статье сфокусировано на эффектах стенок на удлинения в ледовом покрове, однако может быть повторено и для более точных моделей, чем модель Кельвина-Фойгта, в рамках предложенного подхода к решению.

Задача о колебаниях ледового покрова в канале рассматривается в рамках линейной теории гидроупругости [1, 11]. Прогиб ледового покрова $w(x, y, t)$ описывается уравнением колебаний вязкоупругой балки [2, 12]

$$Mw_{tt} + D\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^4 w = P(x, y, t) - \rho_l \varphi_t - \rho_l g w \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №2014/2 и гранта РФФИ №16-08-00291.

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0),$$

где $\tau = \eta/E$ – время релаксации, η – вязкость льда, $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$, $M = \rho_i h_i$ – масса ледового покрова на единицу площади, ρ_i – плотность льда, $p(x, y, 0, t)$ – гидродинамическое давление жидкости на границе лед-жидкость, $P(x, y, t)$ – внешнее давление, g – ускорение свободного падения и $\varphi(x, y, z, t)$ – потенциал скорости течения жидкости, t – время.

Пятно давления, описываемое функцией $P(x, y, t)$, движется вдоль центральной линии канала и имеет форму

$$P(x, y, t) = -P_0 P_1 \left(\frac{x - Ut}{L} \right) P_2 \left(\frac{y}{L} \right) \quad (2)$$

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L),$$

Потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения жидкости и граничным условиям непротекания

$$\varphi_z = w_t \quad (z = 0), \quad \varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -H). \quad (4)$$

Условие примороженного ледового покрова к стенкам канала моделируется условиями жесткого закрепления

$$w = 0, \quad w_y = 0 \quad (-\infty < x < \infty, y = \pm L). \quad (5)$$

Оператор $\tau \partial / \partial t$ в уравнении вязкоупругой пластины (1) описывает эффект демпфирования колебаний ледовой пластины. Гидроупругие волны затухают в отдалении от движущейся нагрузки. Требуется определить W и распределение удлинений в ледовом покрове при заданных типовых значениях параметров задачи.

В работе также рассматривается задача о гидроупругой реакции пластины на движение под ее поверхностью трехмерного диполя. Гидродинамический диполь с интенсивностью M , расположенный в жидкости в точке (x_0, y_0, z_0) , описывает внешнее воздействие удаленной точечной нагрузки, достаточной для создания возмущений в жидкости в отдалении от нагрузки [13]. Потенциал трехмерного диполя в направлении оси x в безграничной жидкости описывается формулой

$$\phi(x, y, z) = \frac{Mx}{4\pi r^3}, \quad r(x, y, z, z_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Заметим, что x_0 , y_0 , z_0 и M могут быть функциями времени. В этом случае $\phi = \phi(x, y, z, t)$. Потенциал трехмерного диполя с учетом граничных условий непротекания на границах $y = \pm L$, $z = -H$, $z = 0$ получен с использованием метода зеркальных отображений. Сначала определяется потенциал ϕ_1 с учетом стенок $y = \pm L$, затем на основе ϕ_1 вычисляется потенциал ϕ с учетом стенок $z = -H$, $z = 0$

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, z, z_0) = & \frac{Mx}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r^3(x, y_0 + 4(n-1)L, z, z_0)} + \right. \\ & + \frac{1}{r^3(x, 2L - y_0 + 4(n-1)L, z, z_0)} + \frac{1}{r^3(x, y_0 - 4nL, z, z_0)} + \\ & \left. + \frac{1}{r^3(x, -2L - y_0 - 4(n-1)L, z, z_0)} \right) \\ \phi(x, y, z, t) = & \sum_{m=1}^{\infty} (\phi_1(x, y, \tilde{z}, \tilde{z}_0 + 2(m-1)H) + \\ & \phi_1(x, y, \tilde{z}, H - \tilde{z}_0 + 2(m-1)H) + \phi_1(x, y, \tilde{z}, \tilde{z}_0 - 2mH) + \\ & + \phi_1(x, y, \tilde{z}, -H - \tilde{z}_0 + 2(m-1)H)), \quad \hat{z} = z + H/2. \end{aligned}$$

Суммарный потенциал φ имеет вид

$$\varphi(x, y, z, t) = \phi + \varphi_E(x, y, z, t), \quad (6)$$

где φ_E – потенциал течения жидкости, вызванного прогибом пластины w . Кинематическое условие (4) примет вид

$$w_t = \varphi_z = \varphi_{E,z}(x, y, 0, t)$$

и уравнение (1) с учетом тождества (6) запишется в виде

$$Mw_{tt} + D \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w = -\rho_l \phi_t - \rho_l \varphi_{E,t} - \rho_l g w, \quad (7)$$

где $\varphi_{E,t}$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения жидкости и условиям (4), потенциал ϕ_t в частном случае может рассматриваться как внешняя нагрузка P и тогда уравнение (7) сводится к уравнению (1). Требуется определить w и распределение удлинений в ледовом покрове при заданных параметрах M, x_0, y_0, z_0 ($-L < y_0 < L, -H < z_0 < 0$).

В данной работе исследуются только положительные удлинения которые соответствуют растяжению ледового покрова. Масштаб удлинений принимается равным $h_i P_0 / (2\rho_l g L^2)$. Тензор удлинений вычисляется по формуле

$$E(x, y) = -\zeta \begin{pmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{xy} & w_{yy} \end{pmatrix},$$

где ζ – безразмерный параметр, изменяющийся по толщине канала, $-1 \leq \zeta \leq 1$. Для определения максимальных удлинений в ледовом покрове необходимо найти собственные значения тензора в каждой точке ледового покрова. Вычисленные удлинения пропорциональны величине амплитуды P_0 внешней нагрузки в рамках линейной теории.

Максимальные удлинения в ледовой пластине зависят от времени релаксации τ и увеличиваются с уменьшением τ . Данный параметр показывает насколько быстро возмущения в ледовом покрове затухнут в отдалении от источника возмущений. Значение этого параметра может быть вычислено с помощью полевых экспериментов. Напряжения в ледовом покрове лимитированы для любой скорости движения нагрузки, включая случаи критической скорости. Данный факт объясняется вязкоупругими свойствами льда и нелинейным взаимодействием между ледовым покровом и жидкостью в канале. Эффекты демпфирования являются наиболее важными когда источник возмущений движется со скоростью, большей чем первая критическая скорость $U_{crit}^{(1)}$ в данном канале. Что касается самой первой критической скорости, и нелинейное взаимодействие, и демпфирование могут вносить определяющий вклад в распределение напряжений, когда нагрузка или диполь двигаются со скоростью, близкой к первой критической $U_{crit}^{(1)}$. Для определения условий когда нелинейные эффекты должны быть включены в исследование задачи, необходимо оценить порядки слагаемого с демпфированием и нелинейных слагаемых. Слагаемое в уравнении пластины (1) с τ оценивается как $O(D\tau U_{crit}^{(1)} w_{sc} / L^5)$, где $w_{sc} = P_0 / (\rho_l g)$ – масштаб удлинений. Нелинейные эффекты, в частности, определяются из гидродинамического давления $p(x, y, w(x, y, t), t)$. Интеграл Бернулли с нелинейными эффектами записывается в виде

$$p(x, y, w(x, y, t), t) = -\rho_l \phi_t - \rho_l g w - \rho_l |\nabla \varphi|^2 / 2.$$

Из интеграла Бернулли определяется оценка нелинейного слагаемого $O(\rho_l w_t^2) = O(\rho_l (U_{crit}^{(1)})^2 w_{sc}^2 / L^2)$. Из полученных оценок легко выводится, что диссипативный эффект является определяющим и можно пренебречь нелинейными слагаемыми если

$$\tau E h_i^3 g \gg U_{crit}^{(1)} P_0 L^3.$$

Данное неравенство означает, что нелинейные эффекты могут быть определяющими для широких каналов (большое L), нагрузкой с большой массой (большое P_0), глубоких каналов (большое значение $U_{crit}^{(1)}$), ледовые покровы с малой толщиной льда h_i , лед с малым значением параметра модуля Юнга E и малым временем релаксации τ . В заключении заметим, что несмотря на важность нелинейных эффектов для бесконечной пластины с движущейся по льду нагрузкой, учет этих эффектов можно пренебречь для колебаний ледового покрова в канале с нагрузкой таких же размеров, где вязкоупругие эффекты могут вносить определяющий вклад в распределение прогибов и удлинений.

Библиографический список

1. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. Moving loads on ice. Kluwer Academic Publishers, 1996.
2. Hydroelasticity in marine technology. Edited by S. Malenica, N. Vladimir and I. Senjanovic. VIDICI d.o.o., 2015.
3. Korobkin A., Khabakhpasheva T., Papin A. Waves propagating along a channel with ice cover // European Journal of Mechanics B / Fluids, 2014. V. 47.

4. Козин В. М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. – М.: Академия Естествознания, 2007. – С. 355.
5. Ахмерова И.Г., Папин А.А. Разрешимость в «целом» уравнений одномерного движения газожидкостного слоя // Известия Алтайского государственного университета. – 2007. – № 1. – С. 34–38.
6. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2014. – Вып. 1/2 (81). – С. 38–41.
7. Шишмарев К.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // Труды молодых ученых АлтГУ. – 2011. – №8.
8. Zhestkaya V.D. Numerical solution of the problem of an ice sheet under a moving load // J App Mech Tech Phys 1999;40(4):770–75.
9. Zhestkaya V.D., Kozin V.M. Ice Breaking with Air-Cushion Vessels Using a Resonant Method. Dalnauka. – Vladivostok; 2003; 160 pp.
10. Brocklehurst P. Hydroelastic waves and their interaction with fixed structures : PhD thesis, University of East Anglia, UK; 2012.
11. Папин А.А., Токарева М.А., Шишмарев К.А. Математические вопросы динамики ледового покрова // Вестник алтайской науки. –2015. – Вып.1(23). – С. 161–171.
12. Шишмарев К.А. Математические вопросы моделирования взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2015. – Вып. 1/1 (85). – С. 126–132.
13. Miloh T. Mathematical Approaches in Hydrodynamics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1991. – 540 p.

УДК 532.546+536.415

Моделирование протаивания в процессе дождевания

В.В. Янцен

АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается процесс протаивания мёрзлого насыщенного грунта представляющего собой пористую сплошную среду [1, 2], с порами заполненными льдом и скелетом состоящим из гальки и супеси. Работа посвящена исследованию протаивания мёрзлого насыщенного грунта в процессе дождевания. Данный технологический процесс широко используется в рудодобывающей промышленности. В естественных условиях влияние атмосферных осадков на промерзание и протаивание мёрзлых грунтов весьма существенна. Изучению автомодельных режимов протаивания мёрзлого грунта были посвящены работы [1], где исследованы режимы протаивания почвы, замерзания выпавшей воды а так же стационарного положения фронта.

В данной работе численно исследуется задача оценки скорости протаивания грунта в зависимости от температуры мёрзлого грунта и интенсивности дождевания в рамках автомодельной постановки, предложенной в [1].

Ключевые слова: фазовый переход, насыщенный грунт, задача Стефана, автомодельное решение.

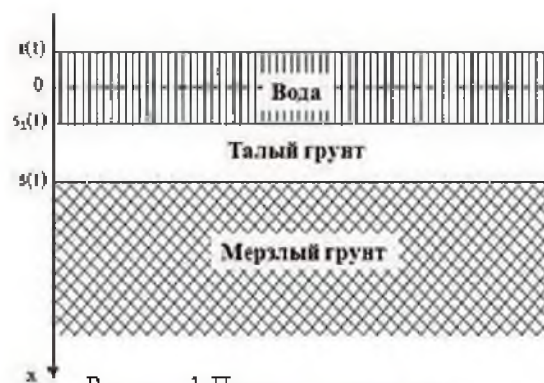


Рисунок 1-Протаивание грунта

Автомодельный вариант задачи. Рассмотрим процесс протаивания мерзлого грунта, при котором температура фазового перехода T^* равна постоянной величине. Будем рассматривать массу мерзлого грунта, занимающего в начальный момент область $x \geq 0$ и находящегося при атмосферном давлении и температуре $T = T_\infty < T^*$, где T^* температура фазового перехода.