Министерство образования и науки РФ
Алтайский государственный университет
Рубцовский институт (филиал)

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Рубцовск — Барнаул

Издательство
Алтайского государственного
университета
2016

УДК 519.6, 517.97
ББК 22.161.8, 22.193
В 181

Рецензент:
доктор физико-математических наук *А. Г. Петрова*

В 181 **Вариационное исчисление** [Текст] : учебное пособие / авт.-сост. А. С. Шевченко. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2016. — 132 с.

ISBN 978-5-7904-2124-2

В пособии изложены методы решения классических вариационных задач.

В каждом разделе кратко изложены теоретические сведения, приведены решения типовых примеров и задачи для самостоятельного решения.

В Приложении рассматривается применение математического пакета Maple к решению вариационных задач с фиксированными границами.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Прикладная информатика» при изучении дисциплины «Теория оптимального управления», а также для аспирантов, преподавателей вузов, инженеров и научных работников.

УДК 519.6, 517.97
ББК 22.161.8, 22.193

ISBN 978-5-7904-2124-2

© Авт.-сост. Шевченко А. С., 2016
© Оформление. Издательство Алтайского государственного университета, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Тема 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ 5
1.1. Задачи, приводящие к вариационным проблемам 5
1.2. Основные определения вариационного исчисления 11
Задачи для самостоятельного решения 21

Тема 2
ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ФИКСИРОВАННЫМИ ГРАНИЦАМИ 24
2.1. Основная лемма вариационного исчисления. Лемма Дюбуа-Реймонда 24
2.2. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера 25
2.3. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера 30
2.4. Функционалы, зависящие от нескольких функций 34
2.5. Функционалы с производными высшего порядка 36
Задачи для самостоятельного решения 38

Тема 3
ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ 43
3.1. Задача с подвижными концами 43
3.2. Задача с подвижными границами 46
Задачи для самостоятельного решения 51

Тема 4
ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ 53
4.1. Основные типы задач на условный экстремум 53
4.2. Необходимые условия в задаче Лагранжа 54
4.3. Необходимые условия в изопериметрической задаче 64
4.4. Задача Больца и задача Майера 72
Задачи для самостоятельного решения 76

Тема 5
ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА 79
5.1. Вторая вариация. Достаточные условия слабого экстремума 79
5.1.1. Квадратичный функционал и вторая вариация 79
5.1.2. Формула для второй вариации. Условие Лежандра 82
5.1.3. Исследование квадратичного функционала 83
5.1.4. Сопряженные точки. Необходимое условие Якоби 84
5.1.5. Функционалы от нескольких функций 85
5.2. Теория поля. Достаточные условия сильного экстремума... 87
5.2.1. Поле экстремалей 87
5.2.2. Функция Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$. Достаточные условия Вейерштрасса 95
Задачи для самостоятельного решения..... 100

Тема 6
ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ 104
6.1. Прямые методы 104
6.2. Конечно-разностный метод Эйлера..... 106
6.3. Метод Ритца 108
Задачи для самостоятельного решения..... 111

Индивидуальное домашнее задание 113

Приложение..... 120

Библиографический список 129

Учебное издание

Автор-составитель:
А. С. Шевченко

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Подготовка оригинал-макета,
оформление обложки — *О. В. Майер*

Издательская лицензия ЛР 020261 от 14.01.1997.
Подписано в печать 24.10.2016.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Усл.-печ. л. 7,6. Тираж 100. Заказ 250.

Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66